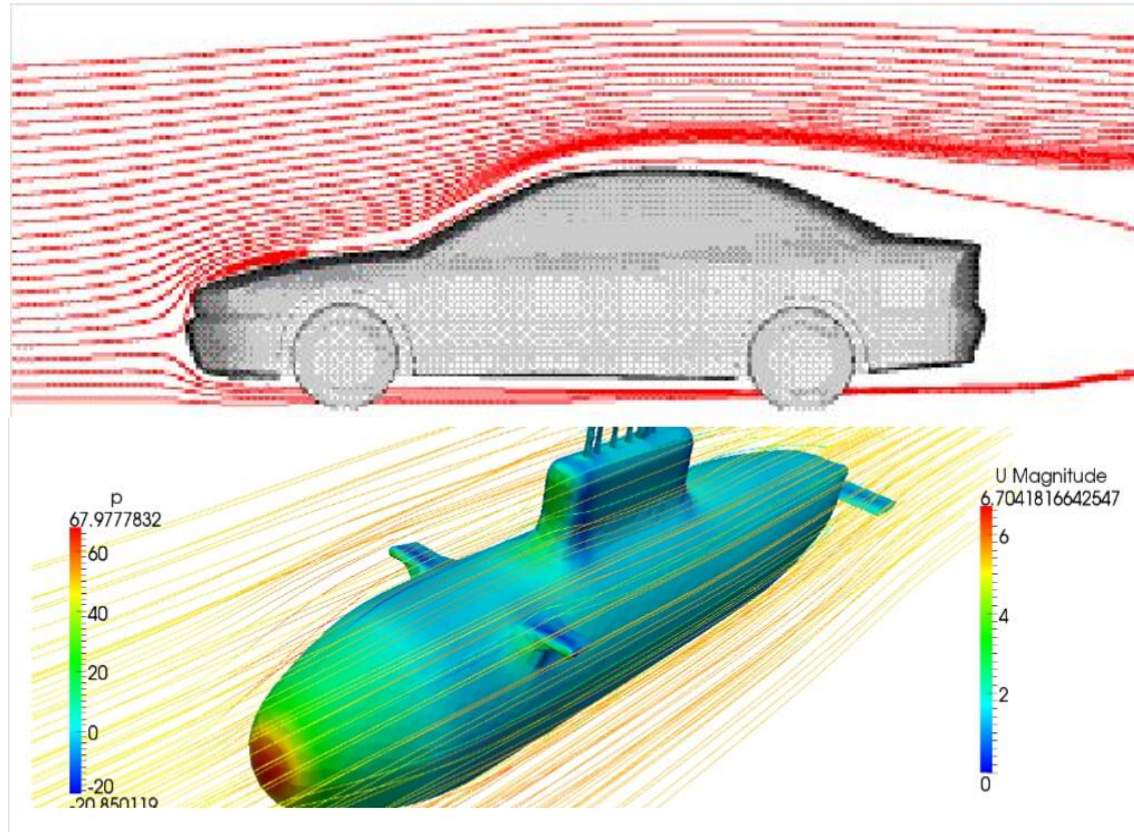


# MEKANIKA FLUIDA II

# EXTERNAL FLOW

Apa itu *external flow*?

- Aliran udara di sekitar pesawat terbang, mobil dan gumpalan salju yang turun begitu juga aliran air di sekitar kapal selam dan ikan.
- Hal ini dapat dikatakan aliran melewati benda terendam karena dalam situasi ini benda-benda tersebut dikelilingi seluruhnya oleh fluida dan alirannya disebut sebagai *external flow* atau aliran luar.

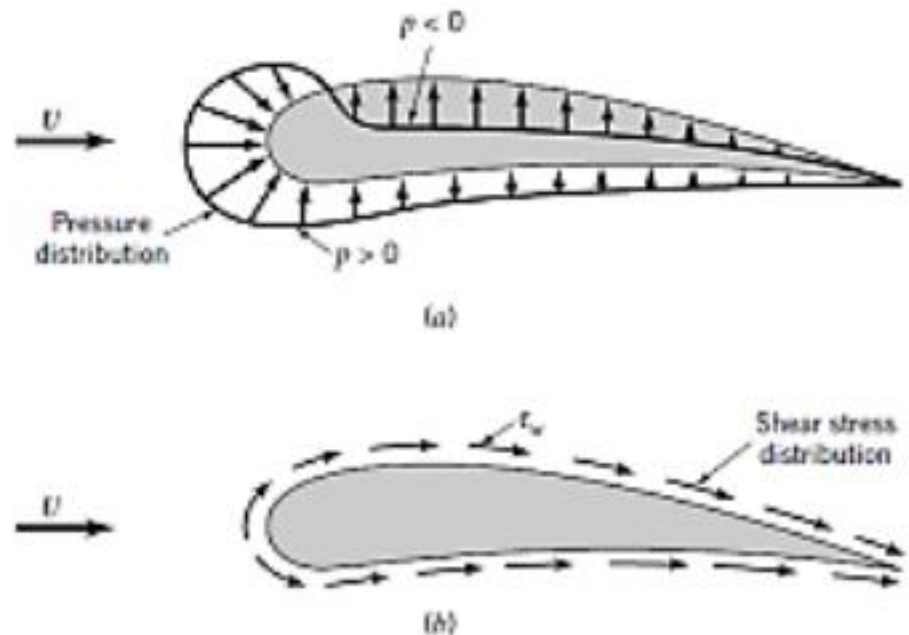


# *EXTERNAL FLOW*

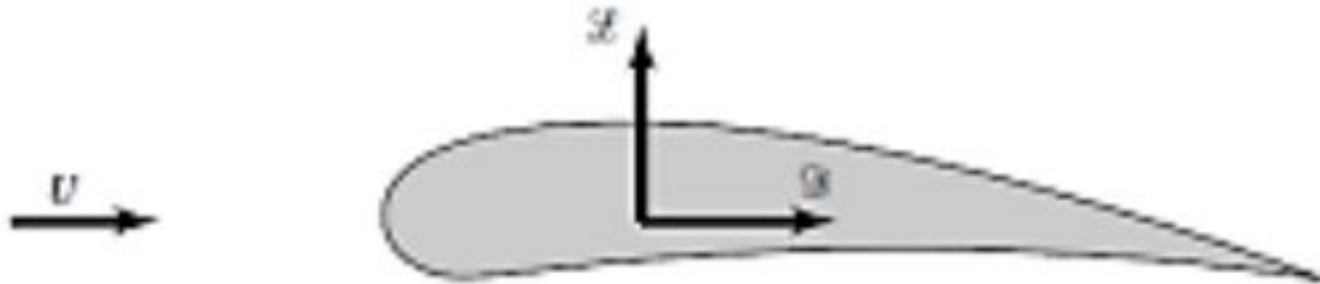
- *External flow* yang melibatkan fluida udara sering disebut **aerodinamika**.
- **Aerodinamika** merupakan salah satu bidang kajian yang penting dalam *external flow*, selain itu gaya fluida seperti **gaya angkat (*lift force*)** dan **gaya seret (*drag force*)** pada permukaan kendaraan seperti mobil, truk, sepeda, dan sebagainya telah menjadi topik yang sangat penting dalam bahasan *external flow*.
- Merancang kendaraan seperti mobil dan truk secara benar melalui analisis *external flow* dapat mengurangi konsumsi bahan bakar dan meningkatkan karakteristik pengendalian kendaraan.

# Lift and Drag

Saat sebuah benda bergerak melalui fluida, interaksi antara benda dan fluida akan terjadi. Efek ini dapat digambarkan dalam bentuk gaya-gaya pada pertemuan antar-muka benda dan fluida yang digambarkan dalam tegangan geser dinding akibat efek viskos dan tegangan normal akibat tekanan,  $P$ . Baik  $\tau_w$  dan  $P$  bervariasi besar dan arahnya disepanjang permukaan.

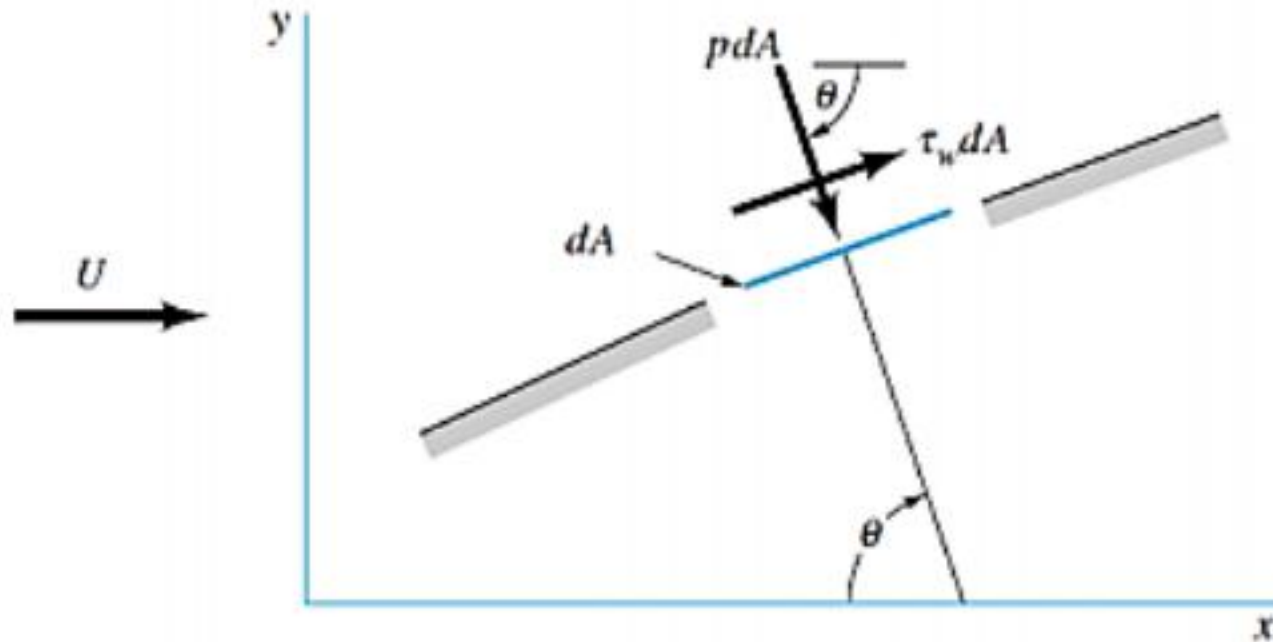


# *Lift and Drag*



Resultan gaya dengan arah sejajar dengan kecepatan hulu disebut gaya hambat (*drag*),  $D$ , dan gaya resultan yang tegak lurus terhadap arah kecepatan hulu disebut sebagai gaya angkat (*lift*),  $L$ .

# Lift and Drag



$$dF_x = (p dA) \cos \theta + (\tau_w dA) \sin \theta \quad dF_y = -(p dA) \sin \theta + (\tau_w dA) \cos \theta$$

$$D = \int dF_x = \int p \cos \theta dA + \int \tau_w \sin \theta dA \quad L = \int dF_y = -\int p \sin \theta dA + \int \tau_w \cos \theta dA$$

# Lift and Drag

## Koefisien *Lift* and *Drag*

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 A}$$

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho v_\infty^2 A}$$

Dimana :

$L$  = Gaya angkat, *lift* (N)

$D$  = Gaya hambat, *drag* (N)

= koefisien gaya hambat (*drag*)

= koefisien gaya angkat(*lift*)

$\rho$  = densitas fluida (kg/m<sup>3</sup>)

$A$  = luasan acuan (m<sup>2</sup>)

= kecepatan fluida relatif terhadap obyek (m/s)

Untuk aliran *incompressible steady* koefisien gaya angkat dan gaya hambat adalah fungsi dari parameter tak berdimensi

$$C_D = C_D(\alpha, Re)$$

$$C_L = C_L(\alpha, Re)$$

# *Drag*

Setiap benda yang bergerak melalui suatu fluida akan mengalami *drag*,  $D$ .

*Drag* merupakan suatu gaya netto dalam arah aliran karena tekanan dan gaya geser pada permukaan benda.

$$D = \int dF_x = \int p \cos \theta \, dA + \int \tau_w \sin \theta \, dA$$

Gaya *Drag* dapat ditentukan dengan menggunakan persamaan di atas bila distribusi tekanan,  $p$ , diketahui. Namun, **sangat jarang** distribusi tekanan ditentukan secara analitis.

# Drag

*Drag* pada sebuah benda umumnya merupakan hasil dari eksperimen yang banyak sekali dilakukan dengan terowongan angin, air, tangki towing, dan peralatan - peralatan lainnya yang digunakan untuk mengukur drag model-model yang diskala.

$$C_D = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 A}$$

Dimana :

$D$  = Gaya hambat, *drag* (N)

$C_D$  = koefisien gaya hambat (*drag*)

$\rho$  = densitas fluida (kg/m<sup>3</sup>)

$A$  = luasan acuan (m<sup>2</sup>)

$v_{\infty}$  = kecepatan fluida relatif terhadap obyek (m/s)

$$C_D = \varphi(\text{bentuk}, Re, Ma, Fr, \varepsilon / l)$$

# Drag Gesekan

*Drag* gesekan,  $D_f$  adalah bagian dari *drag* yang langsung disebabkan oleh tegangan geser.

$\tau_w \sin \theta$  dalam persamaan berikut:

$$D = \int dF_x = \int p \cos \theta dA + \int \tau_w \sin \theta dA$$

Jika permukaan sejajar dengan kecepatan hulu, seluruh gaya geser berkontribusi langsung terhadap *drag*. (ex. pelat datar sejajar kecepatan hulu)

Jika permukaan tegak lurus terhadap kecepatan hulu, tegangan geser tidak berkontribusi apapun terhadap *drag*. (ex. pelat datar tegak lurus kecepatan hulu).

# Drag Gesekan

Karena fluida-fluida yang umum viskositasnya kecil, kontribusi gaya geser terhadap *drag* keseluruhan pada benda seringkali sangat kecil.

Pada bilangan Reynolds yang sangat besar, persentase drag yang disebabkan oleh tegangan geser seringkali sangat kecil.

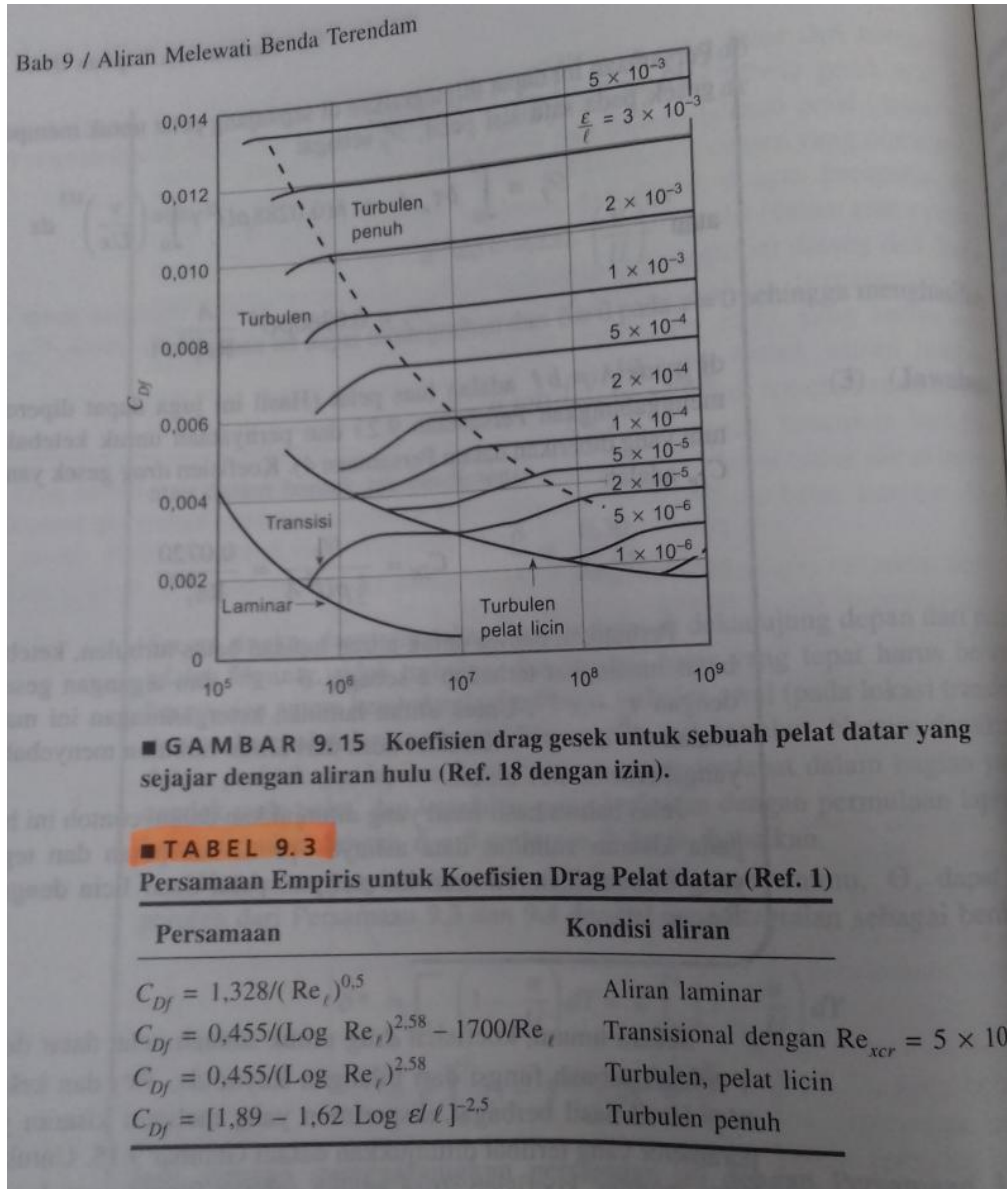
Pada bilangan Reynolds yang rendah, sebagian besar drag disebabkan oleh drag gesekan.

Drag gesekan pada pelat datar dengan lebar  $b$  dan panjang  $l$  yang sejajar dengan aliran hulu dapat dihitung dengan:

$$D_f = \frac{1}{2} \rho U^2 b l C_{Df}$$

dimana,  $C_{Df}$  merupakan koefisien *drag* gesekan yang merupakan fungsi bilangan Reynolds.

# Drag Coefficient



# Drag Tekanan

Drag tekanan adalah drag yang dihasilkan oleh tegangan normal.

Drag tekanan sering disebut drag bentuk karena ketergantungan yang sangat kuat dengan bentuk benda.

Drag tekanan adalah fungsi dari besarnya tekanan dan orientasi arah elemen permukaan di mana gaya itu bekerja.

$$D = \int dF_x = \int p \cos \theta dA + \int \tau_w \sin \theta dA$$

$$C_{D_p} = \frac{D_p}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} = \int \frac{p \cos \theta dA}{\frac{1}{2} \rho U^2 A} = \int \frac{C_p \cos \theta dA}{A}$$

$$C_p = \frac{(p - p_0)}{\frac{\rho U^2}{2}}$$

# Drag Tekanan

$$C_p = \frac{(p - p_0)}{\frac{\rho U^2}{2}}$$

Koefisien tekanan adalah bentuk tak berdimensi dari tekanan

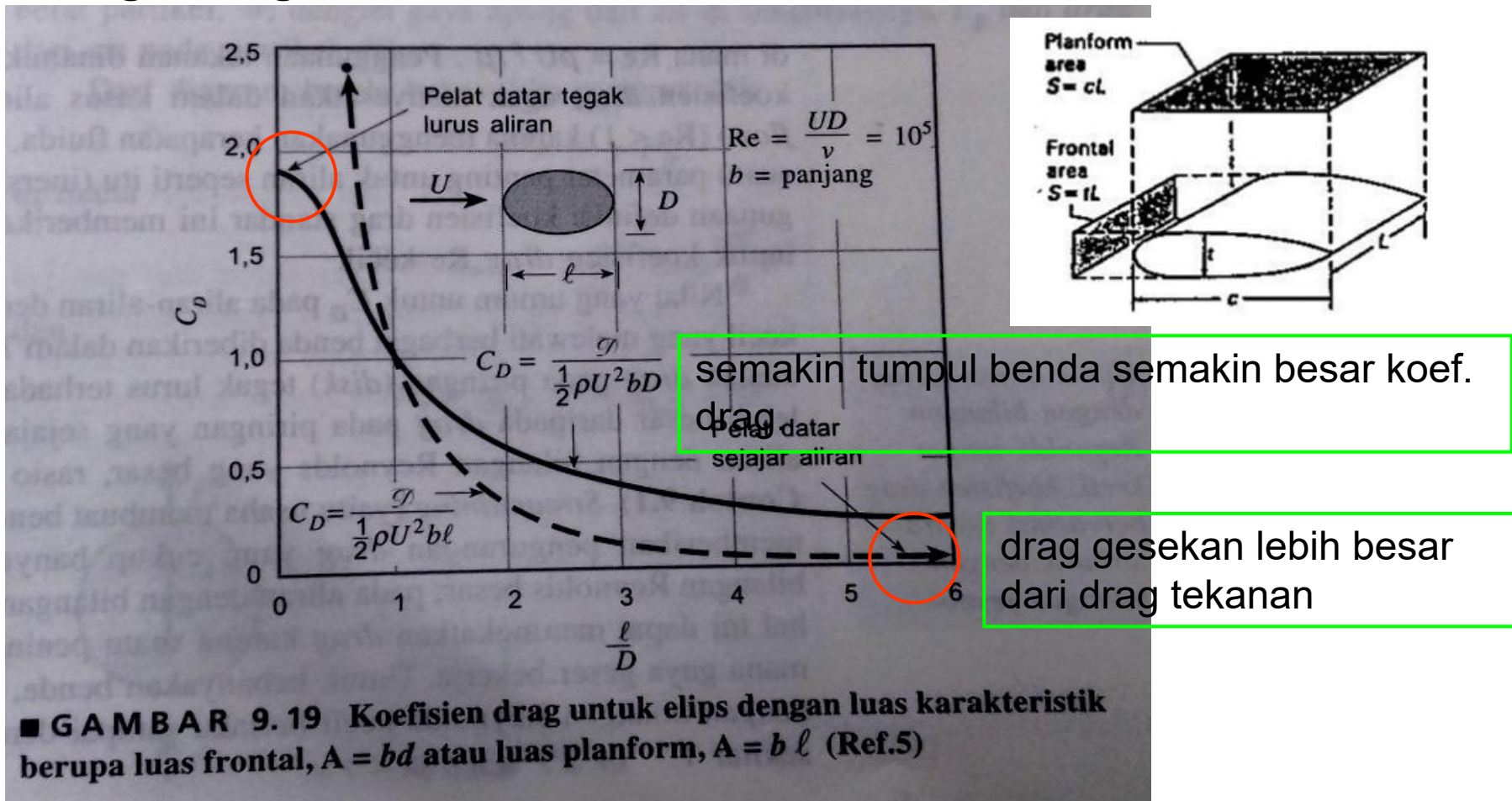
Pada bilangan Reynolds tinggi, perbedaan tekanan berbanding langsung dengan tekanan dinamik, dan koefisien tekanan tidak tergantung pada bilangan Reynolds.

Pada bilangan Reynolds rendah, koefisien drag sebanding dengan  $1/Re$ .

Jika viskositas nol maka drag tekanan pada setiap benda berbentuk apapun dalam aliran tunak akan bernilai nol. Sedangkan jika viskositas tidak nol maka drag tekanan netto mungkin tidak nol karena separasi lapisan batas.

# Data dan Contoh Koefisien Drag

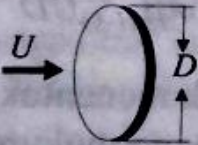


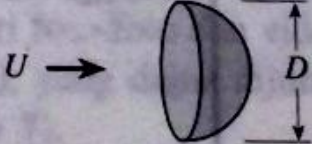
Ketergantungan bentuk



# Data dan Contoh Koefisien Drag

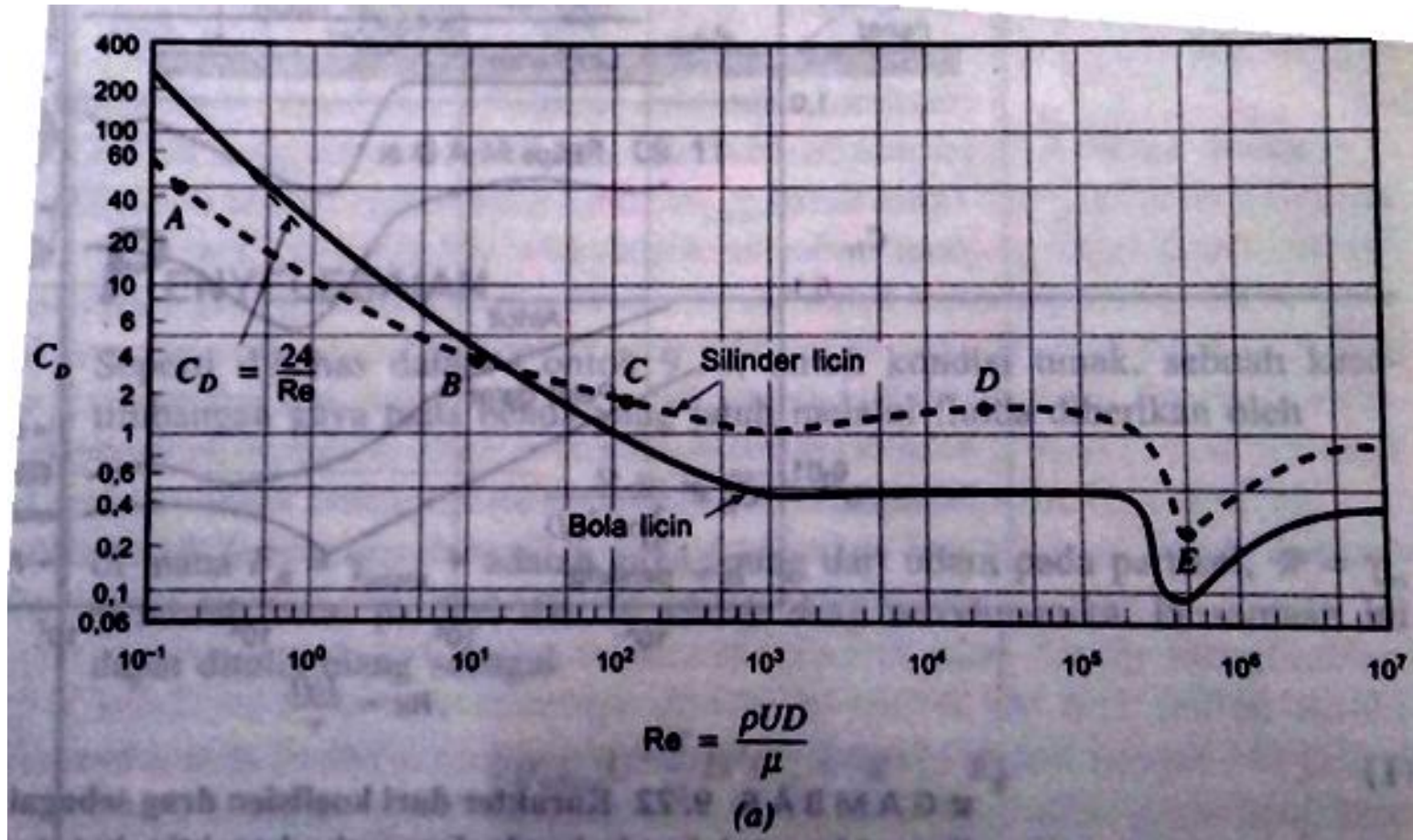
Ketergantungan bilangan Reynolds

■ TABEL 9.4 Koefisien Drag untuk Bilangan Reynolds kecil (Ref.7) ( $Re = \rho UD/\mu$ ,  $A = \pi D^2/4$ )

Objek	$C_D = \mathcal{D}/(\rho U^2 A/2)$ (untuk $Re \leq 1$ )	Objek	$C_D$
a. Piringan bundar tegak lurus	$20,4/Re$	a. Bola	$24,0/Re$
			
b. Piringan bundar sejajar aliran	$13,6/Re$	b. Setengah bola	$22,2/Re$
			

# Data dan Contoh Koefisien Drag

Ketergantungan bilangan Reynolds



LIFT (Gaya Angkat)

# Lift (Gaya Angkat)

Setiap benda yang bergerak melalui suatu fluida akan mengalami gaya netto dari fluida pada benda.

Untuk benda yang simetris, gaya ini akan terjadi dalam arah aliran bebas yaitu drag,  $D$ .

Untuk benda yang tidak simetris, akan terdapat gaya normal terhadap aliran bebas yaitu, lift,  $L$ .

Beberapa benda seperti airfoil dirancang untuk menghasilkan lift, namun lift pada mobil akan mengurangi gaya kontak ban mobil dengan tanah sehingga perancang mobil berusaha mengurangi lift.

# Lift (Gaya Angkat)

Lift, L diberikan dalam bentuk koefisien lift yang diperoleh dari percobaan, analisis tingkat lanjut atau pertimbangan numerik.

$$C_L = \frac{L}{\frac{1}{2} \rho v_{\infty}^2 A}$$

$$C_L = \varphi(\text{bentuk}, Re, Ma, Fr, \varepsilon / l)$$

Dimana :

L = Gaya angkat, lift. (N)

$C_L$  = koefisien gaya angkat (*lift*)

$\rho$  = densitas fluida ( $\text{kg}/\text{m}^3$ )

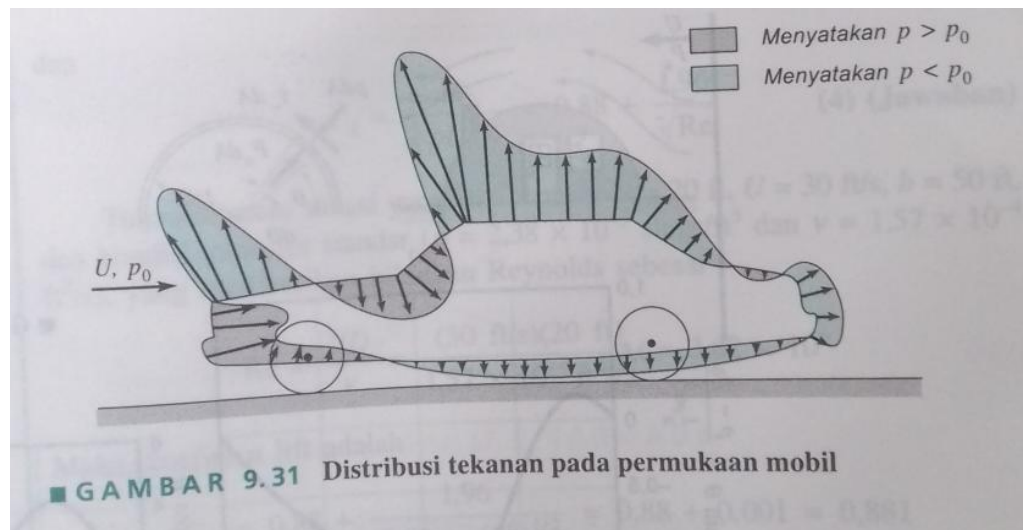
A = luasan acuan ( $\text{m}^2$ )

$v_{\infty}$  = kecepatan fluida relatif terhadap obyek (m/s)

Parameter yang paling penting yang mempengaruhi koefisien lift adalah bentuk benda.

# Lift (Gaya Angkat)

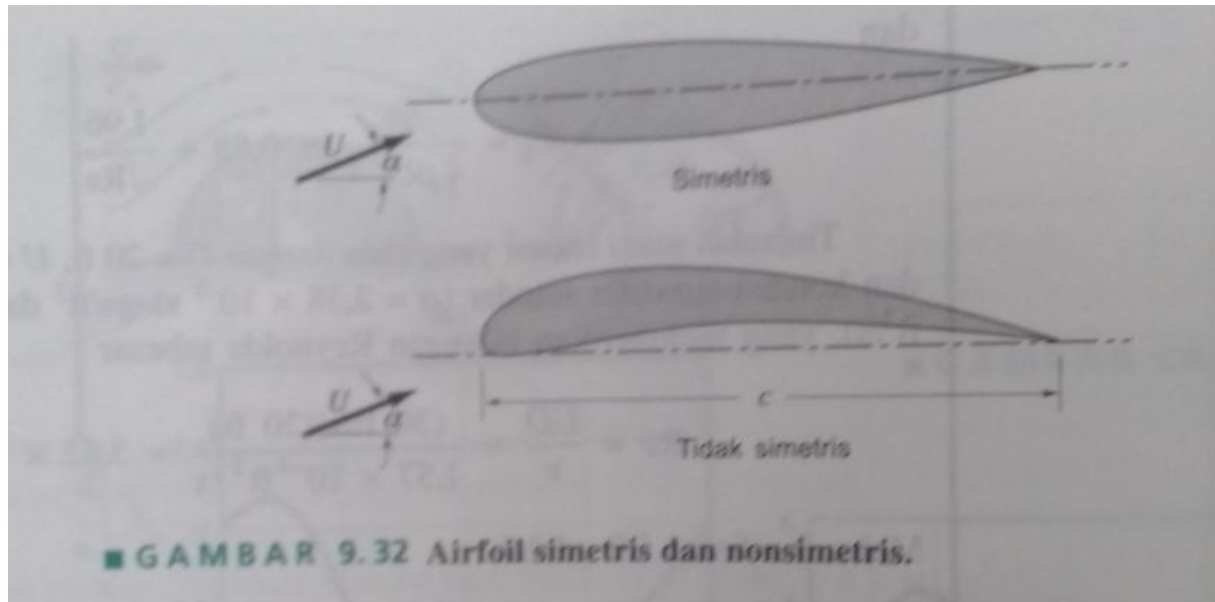
Peralatan penghasil lift paling umum adalah airfoil, fan, spoiler pada mobil dan lain-lain yang bekerja pada Reynolds tinggi dimana aliran mempunyai sifat lapisan batas dengan efek viskos yang terbatas pada lapisan batas dan daerah olakan.



Lokasi dengan aliran berkecepatan tinggi (di atas cap) mempunyai tekanan kecil, sedangkan lokasi pada grill atau windshield yang berkecepatan rendah memiliki tekanan besar.

# Lift (Gaya Angkat)

Suatu alat yang didesain untuk menghasilkan lift bisa bekerja dengan menghasilkan tekanan yang berbeda antara permukaan bagian bawah dengan bagian atas.



Airfoil yang simetris tidak menghasilkan lift kecuali jika sudut serangnya,  $\alpha$  tidak nol. Akibat ketidaksimetrisan airfoil, distribusi tekanan pada permukaan bawah dan atas berbeda sehingga sebuah lift dihasilkan meskipun jika sudut serangnya,  $\alpha = 0$ .

# Lift (Gaya Angkat)

Data koefisien lift dan drag biasa sebagai fungsi dari sudut serang,  $\alpha$  dan rasio aspek,  $A$ .

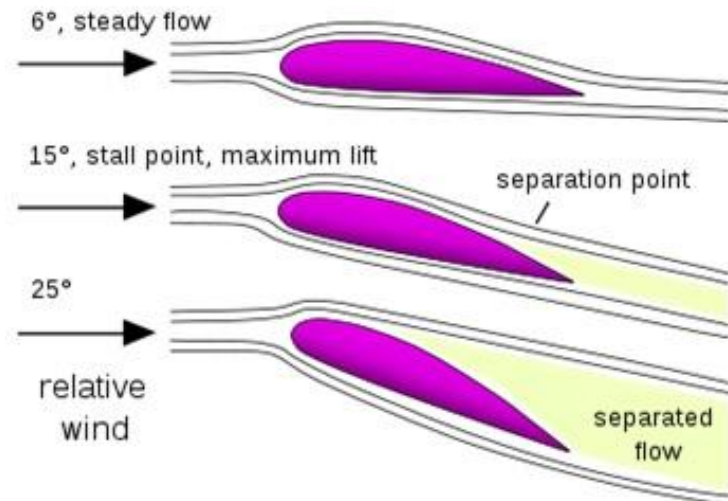
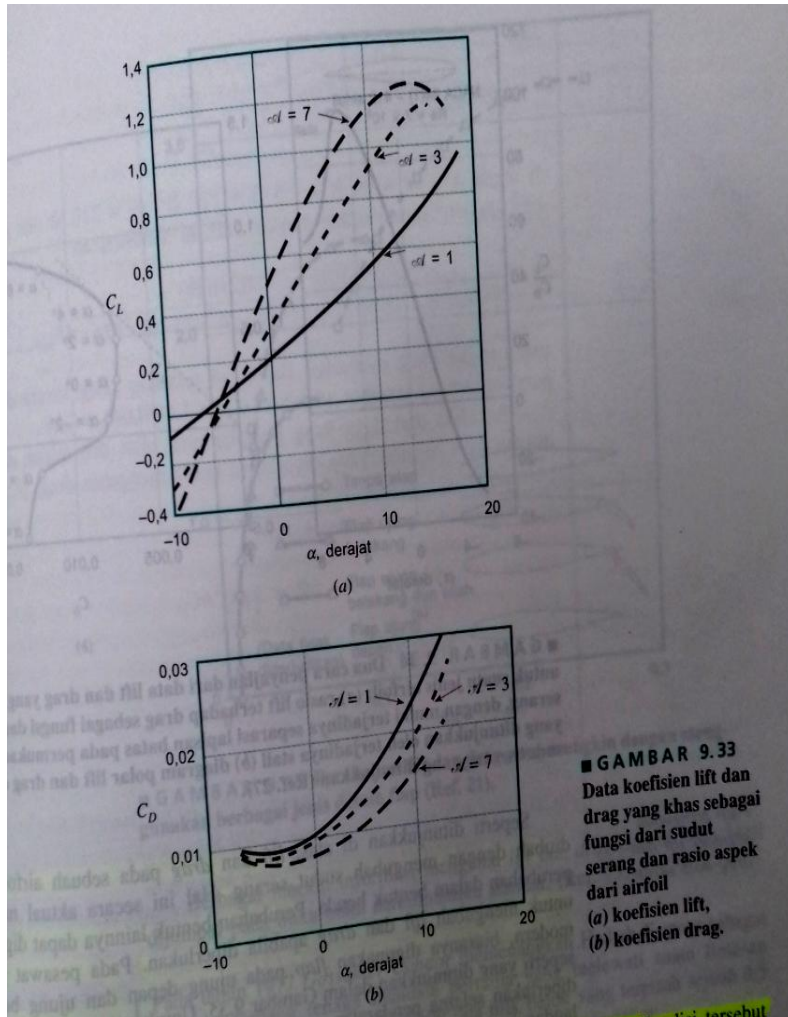
Rasio aspek didefinisikan sebagai rasio dari kuadrat panjang sayap terhadap luas planform,  $A = b^2/A$ . Jika panjang chord konstan sepanjang sayap, maka  $A = b/c$  (sayap dengan planform segiempat).

Secara umum, koefisien lift meningkat dan koefisien drag menurun seiring dengan peningkatan rasio aspek. Sayap yang panjang lebih efisien karena kerugian ujung sayap relatif lebih kecil daripada sayap pendek.

Peningkatan drag karena panjang tertentu  $A < \sim$  dari sayap seringkali disebut drag induksi yang disebabkan oleh interaksi struktur aliran berpusar yang kompleks di dekat ujung sayap dan aliran bebas.

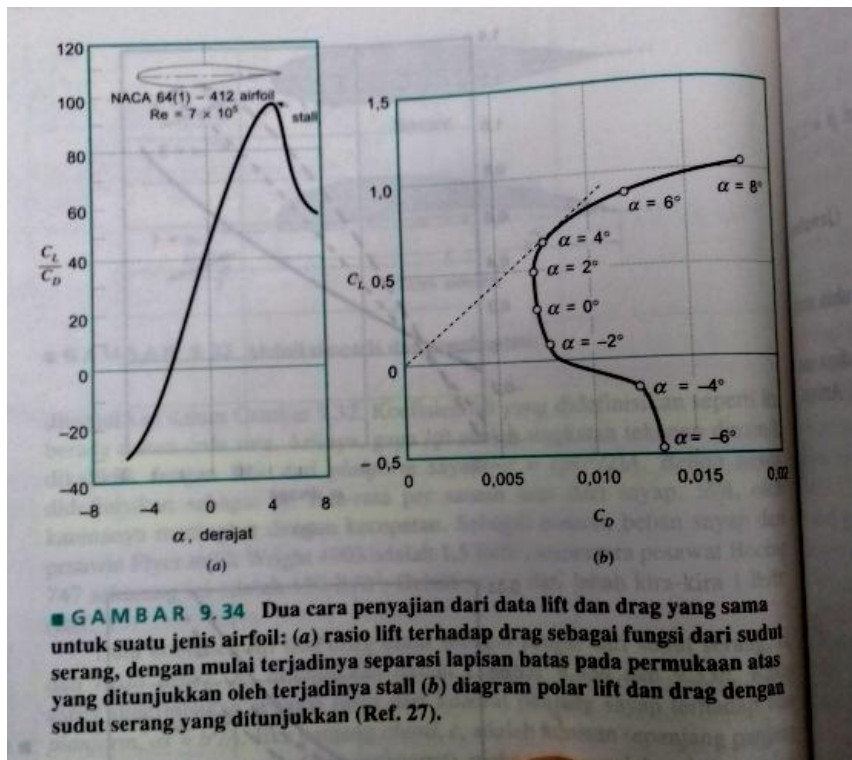
# Lift (Gaya Angkat)

Koefisien lift meningkat seiring peningkatan sudut serang. Sudut serang yang makin besar menyebabkan aliran pada sayap berkembang menjadi daerah olakan turbulent sehingga lift menurun dan drag meningkat, airfoil mengalami stall.



# Lift (Gaya Angkat)

Airfoil berkinerja tinggi menghasilkan lift yang mungkin 100 kali lebih besar dari dragnya.

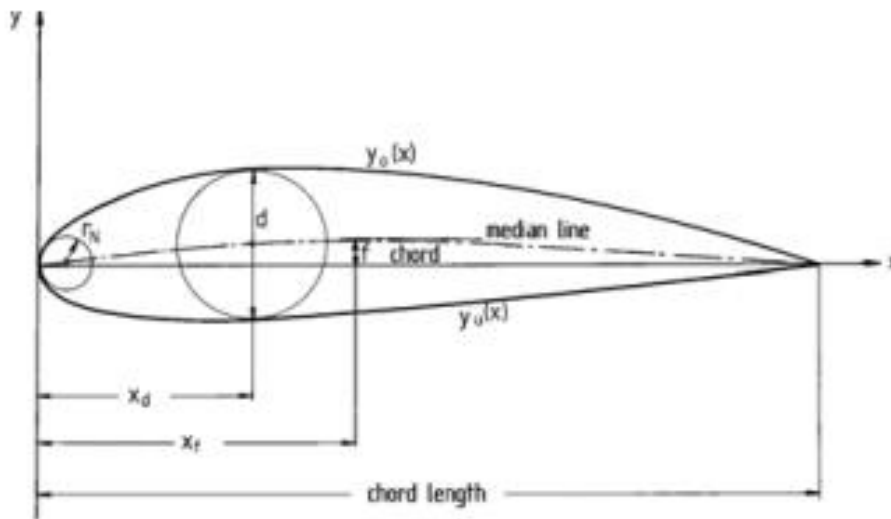
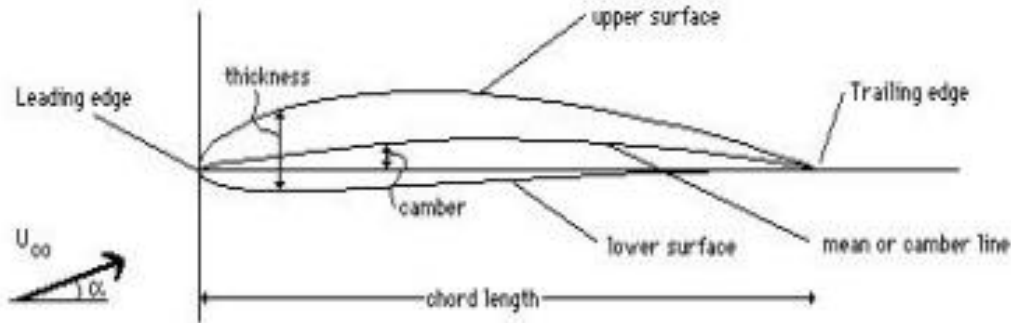


Lift dan drag pada sebuah airfoil dapat diubah dengan mengubah sudut serangnya.

# *Hydrofoil dan Airfoil*

*Hydrofoil* merupakan suatu bentuk sayap atau sudu dari rotor, baling-baling atau turbin yang bekerja pada suatu aliran air. Sedangkan *airfoil* bekerja pada suatu aliran udara.

# Karakteristik *Airfoil*



Dimana :

$c$  = Panjang *chord*

$f$  = maksimum *chamber*

= posisi maksimum *chamber*

$d$  = ketebalan maks airfoil

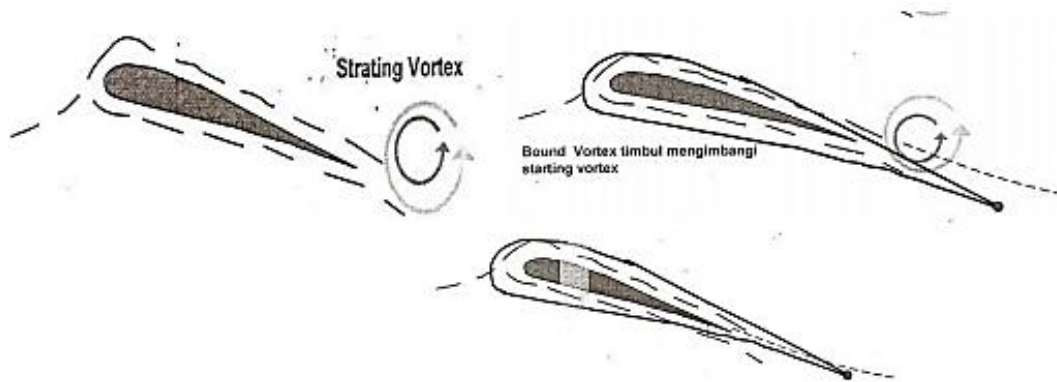
= posisi ketebalan maksimum

$r_n$  = *nose radius*

*Airfoil NACA*

# Karakteristik *Airfoil*

Proses terbentuknya gaya angkat:



Aliran udara mengalir melalui *airfoil* terpecah dua menjadi aliran atas dan bawah permukaan *airfoil*.

Di *trailing edge* kedua aliran bersatu lagi --> terbentuk pusaran yang disebut *starting vortex* karena perbedaan sudut datang, dengan arah putar berlawanan dengan arah jarum jam.

Karena momentum putar awal aliran adalah nol, maka menurut hukum kekekalan momentum, harus timbul pusaran yang melawan arah putar *starting vortex* yang berputar searah jarum jam disebut *bound vortex*.

*Starting vortex* akan bergeser ke belakang karena gerak maju.

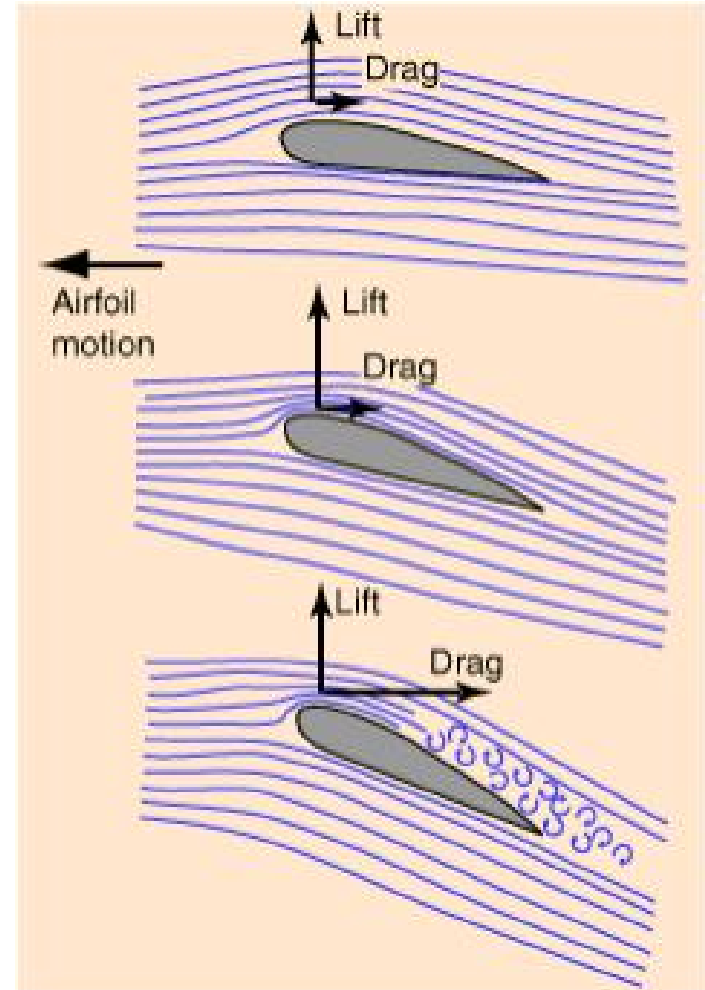
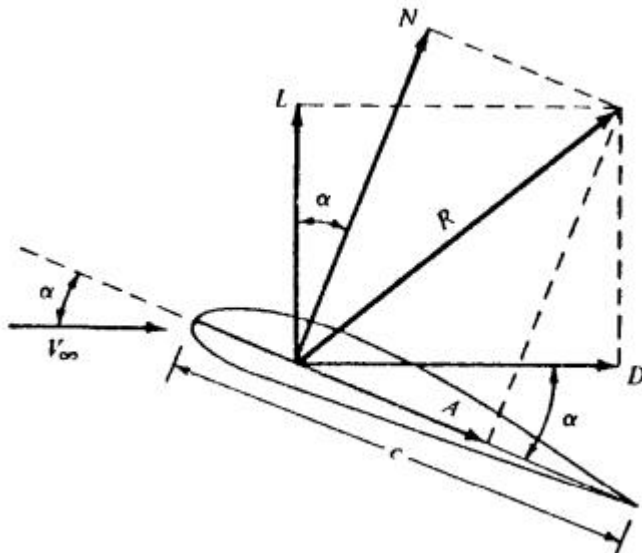
Akibat adanya *bound vortex* ini, aliran di atas permukaan akan mendapat tambahan kecepatan, dan aliran di bawah permukaan akan mendapat pengurangan kecepatan.

Karena terjadi perbedaan kecepatan itulah, sesuai dengan hukum Bernoulli, timbul gaya yang arahnya ke atas dan disebut *lift* (gaya angkat)

# Karakteristik *Airfoil*

## Sudut Serang

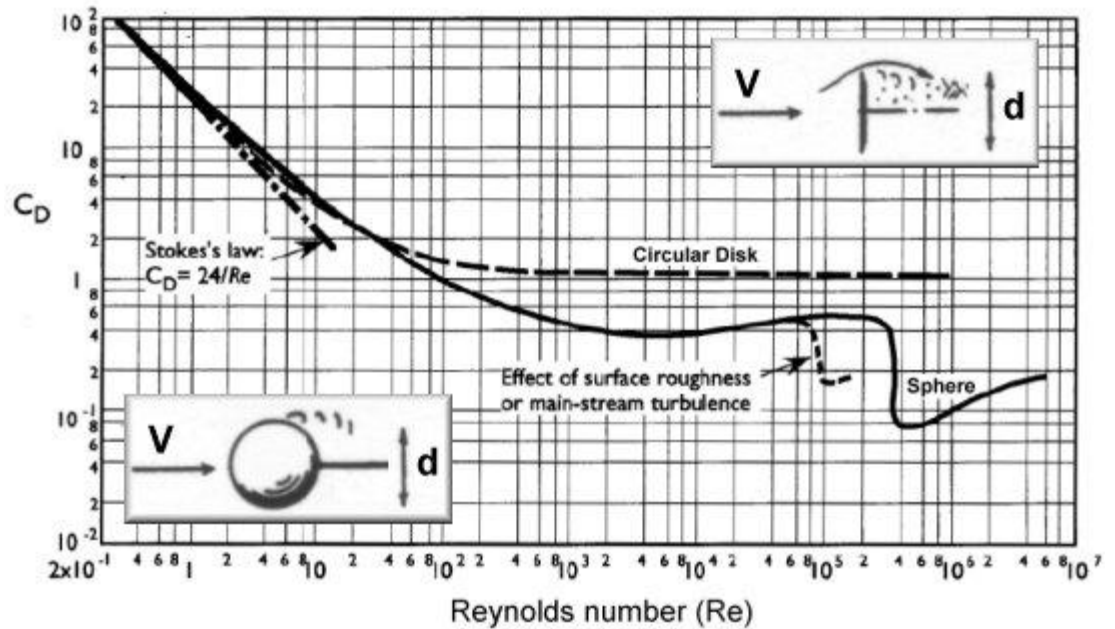
Sudut serang adalah sudut yang dibentuk oleh chord dengan arah datangnya fluida. Atau sudut antara gaya *lift* (L) dan gaya normal (N) dan gaya *drag* (D) dan gaya aksial (A).



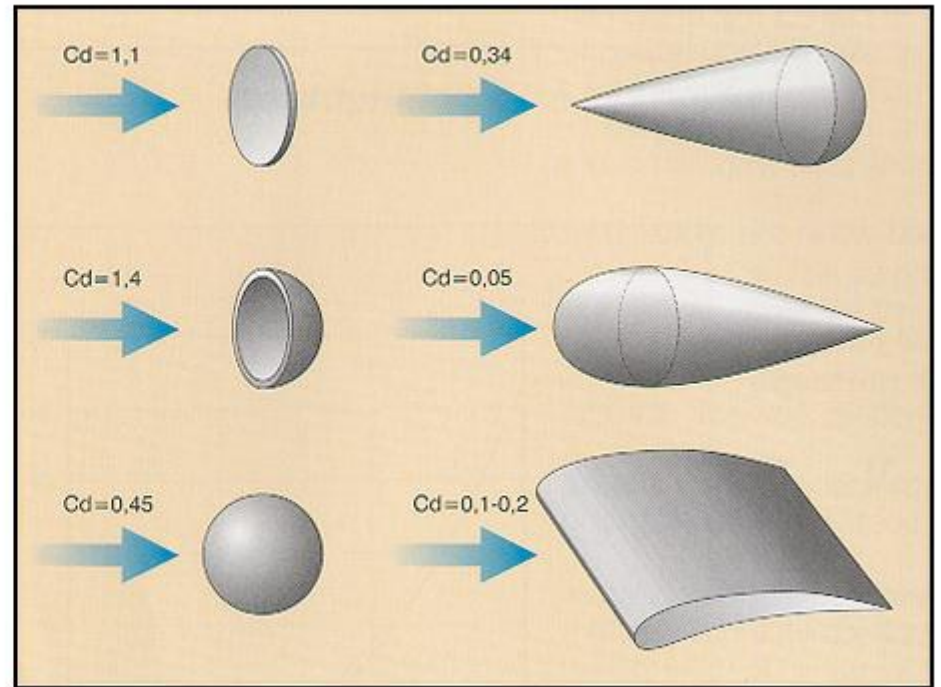
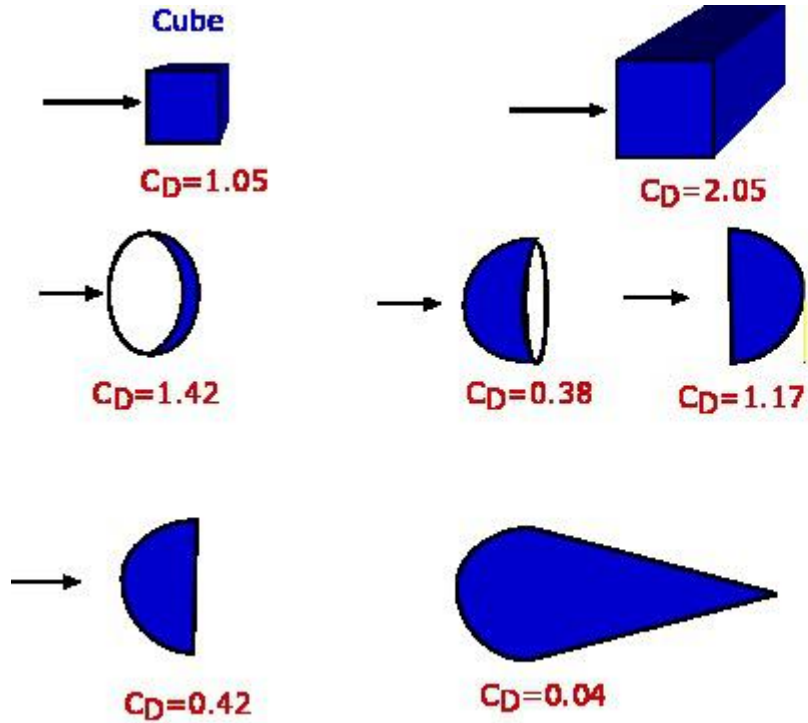
# Koefisien Drag

Shape	Drag Coefficient
Sphere	0.47
Half-sphere	0.42
Cone	0.50
Cube	1.05
Angled Cube	0.80
Long Cylinder	0.82
Short Cylinder	1.15
Streamlined Body	0.04
Streamlined Half-body	0.09

Measured Drag Coefficients



# Koefisien Drag

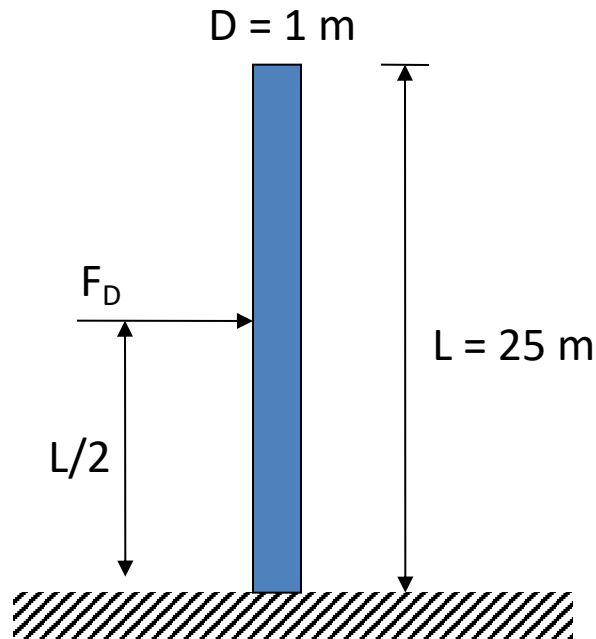


# Contoh soal

Cerobong asap dengan dimensi  $D = 1\text{ m}$ ,  $L = 25\text{ m}$  terkena tiupan angin dengan kecepatan  $50\text{ km/jam}$  pada kondisi udara standar. Hitung : bending momen yang terjadi pada pangkal cerobong.

$$P = 101\text{ kPa}$$

$$T = 15^\circ\text{C}$$



# Contoh soal

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho \cdot V^2 \cdot A} \Rightarrow F_D = \frac{1}{2} \rho \cdot V^2 \cdot A \cdot C_D$$

$$V = 50 \frac{\text{km}}{\text{jam}} \times 10^3 \frac{\text{m}}{\text{km}} \times \frac{\text{jam}}{3600} = 13.9 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

Untuk udara standar :

$$\rho = 1.23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}, \mu = 1.78 \times 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{sec}}$$

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot V \cdot D}{\mu} = \frac{1.23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times 13.9 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \times 1 \text{ m}}{1.78 \times 10^{-5} \frac{\text{kg}}{\text{m} \cdot \text{sec}}} = 9.61 \times 10^5$$

Berdasarkan gambar :  $C_D = 0.35$

Gaya resultan angin diasumsikan bekerja ditengah tengah cerobong :

$$M_o = F_D \times \frac{L}{2} = \frac{L^2}{4} \rho \cdot V^2 \cdot A \cdot C_D$$

$$M_o = \frac{1}{4} (25)^2 \times 1.23 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \times \left(13.9 \frac{\text{m}}{\text{sec}}\right)^2 \times 1 \text{ m} \times 0.35 \times \frac{\text{N} \cdot \text{sec}^2}{\text{kg} \cdot \text{m}} = 1.30 \times \text{N} \cdot \text{m}$$

# Contoh soal

sebuah pesawat mempunyai spesifikasi sebagai berikut :

$$\text{Berat} = 3000 \text{ lbf}$$

$$\text{Luas sayap} = 300 \text{ ft}^2$$

$$\text{Kecepatan take off} = 100 \text{ ft/sec}$$

$$\rho_{\text{udara}} = 0.00238 \text{ slug/ft}^3$$

$$C_L = 0.35 (1 + 0.2 \alpha)$$

$$C_D = 0.008 (1 + \alpha)$$

Hitung :  $\alpha$  dan daya untuk take off

# Contoh soal

Untuk bisa take off, gaya lift = berat pesawat

$$C_L = \frac{F_L}{\frac{1}{2} \rho \cdot V^2 \cdot A} = \frac{3000 \text{ lbf}}{\frac{1}{2}} \times \frac{\text{ft}^3}{0.00238 \text{ slug}} \times \frac{\text{sec}^2}{(100 \text{ ft})^2} \times \frac{1}{3000 \text{ ft}^2} \times \frac{\text{slug} \cdot \text{ft}}{\text{lbf} \cdot \text{sec}^2}$$

$$C_L = 0.84$$

karena :  $C_L = 0.35 (1 + 0.2\alpha)$ , maka :

$$\alpha = \left( \frac{C_L}{0.35} - 1 \right) \times \left( \frac{1}{0.2} \right) = 7^\circ$$

Daya yang diperlukan untuk take off =  $F_D \cdot V$

$$C_D = \frac{F_D}{\frac{1}{2} \rho \cdot V^2 \cdot A} \Rightarrow F_D = \frac{1}{2} C_D \cdot \rho \cdot V^2 \cdot A$$

untuk  $\alpha = 7^\circ \Rightarrow C_D = 0.008(1 + 7) = 0.064$

$$\text{Daya} = F_D \cdot V = \frac{1}{2} C_D \cdot \rho \cdot V^2 \cdot A \cdot V$$

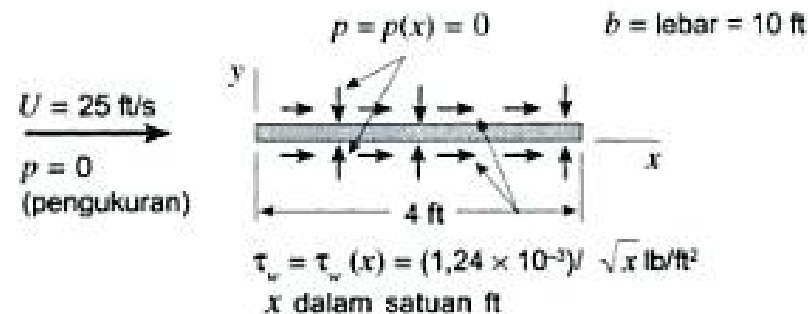
$$\text{Daya} = \frac{1}{2} (0.064) \times 0.00238 \frac{\text{slug}}{\text{ft}^3} \times \left( \frac{(100 \text{ ft})^2}{\text{sec}^2} \right) \times 300 \text{ ft}^2 \times \frac{100 \text{ ft}}{\text{sec}} \times \frac{\text{lbf} \cdot \text{sec}^2}{\text{slug} \cdot \text{ft}} \times \frac{\text{hp} \cdot \text{sec}}{550 \text{ ft} \cdot \text{lbf}}$$

$$\text{Daya} = 41.5 \text{ Hp}$$

# Contoh Soal

## CONTOH 9.1

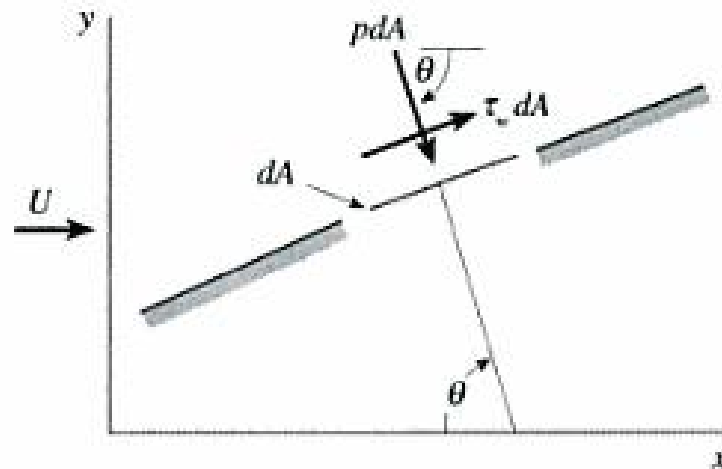
Udara pada kondisi standar mengalir melewati sebuah pelat datar seperti yang ditunjukkan dalam Gambar C9.1. Pada kasus (a) pelat sejajar dengan aliran hulu, dan (b) pelat tegak lurus aliran hulu. Jika distribusi tekanan dan tegangan geser pada permukaan benda seperti yang ditunjukkan (diperoleh baik dengan eksperimen atau secara teori), tentukan *lift* dan *drag* pada pelat.



(a)

■ GAMBAR C9.1

# Contoh Soal



■ **GAMBAR 9.4** Gaya tekanan dan gaya geser pada sebuah elemen kecil dari permukaan sebuah benda.

$$\mathcal{D} = \int dF_x = \int p \cos \theta \, dA + \int \tau_w \sin \theta \, dA \quad (9.1)$$

dan

$$\mathcal{L} = \int dF_y = - \int p \sin \theta \, dA + \int \tau_w \cos \theta \, dA \quad (9.2)$$

# Contoh Soal

Tentu saja untuk melakukan pengintegralan dan menentukan *lift* dan *drag*, kita harus mengetahui bentuk benda (yaitu,  $\theta$  sebagai suatu fungsi dari lokasi di sepanjang benda) dan distribusi dari  $\tau_w$  dan  $\rho$  di sepanjang permukaan. Distribusi-distribusi ini seringkali sangat sulit didapatkan, baik secara eksperimental maupun secara teoretis. Distribusi tekanan dapat diperoleh secara eksperimental tanpa banyak kesulitan dengan menggunakan serangkaian tap tekanan statik sepanjang permukaan benda. Di sisi lain, biasanya sangat sulit untuk mengukur distribusi tegangan geser dinding.

Kelihatannya baik tegangan geser maupun tekanan sama-sama memberikan kontribusi terhadap *lift* dan *drag*, karena untuk sembarang benda  $\theta$  tidak nol ataupun  $90^\circ$  pada benda. Pengecualian adalah untuk pelat datar yang diatur baik sejajar terhadap aliran hulu ( $\theta = 90^\circ$ ) atau tegak lurus terhadap aliran hulu ( $\theta = 0$ ) seperti yang dibahas dalam Contoh 9.1.

# Contoh Soal

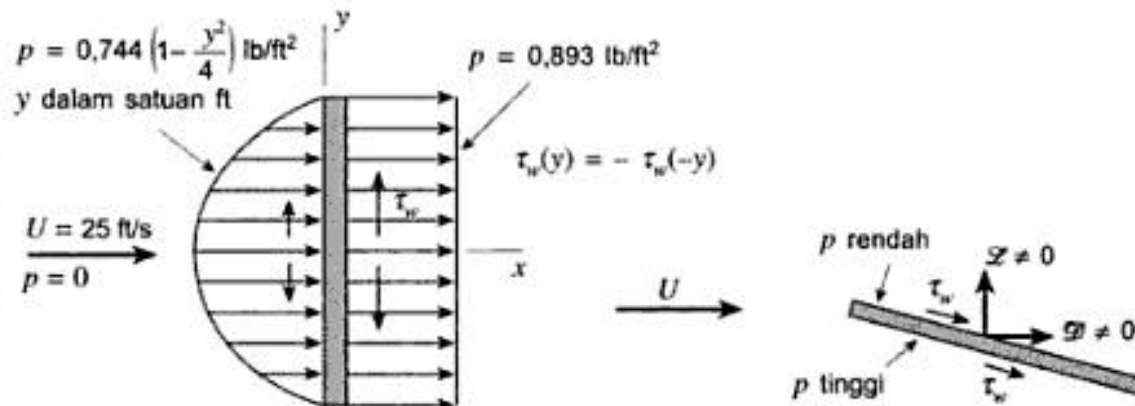
## PENYELESAIAN

Untuk masing-masing arah orientasi pelat, *lift* dan *drag* diperoleh dari Persamaan 9.1 dan 9.2. Dengan pelat sejajar terhadap arus hulu, kita dapatkan  $\theta = 90^\circ$  pada permukaan atas dan  $\theta = 270^\circ$  pada permukaan bawah sehingga *lift* dan *drag* diberikan oleh

$$\mathcal{L} = - \int_{\text{atas}} p \, dA + \int_{\text{bawah}} p \, dA = 0$$

dan

$$\mathcal{D} = \int_{\text{atas}} \tau_w \, dA + \int_{\text{bawah}} \tau_w \, dA = 2 \int_{\text{atas}} \tau_w \, dA \quad (1)$$



# Contoh Soal

di mana kita telah menggunakan fakta bahwa karena kesimetrisan, distribusi tegangan geser sama pada permukaan atas dan permukaan bawah, demikian juga tekanannya [baik jika kita gunakan tekanan pengukuran ( $p = 0$ ) atau tekanan mutlak ( $p = p_{atm}$ )]. Tidak terdapat *lift* yang dihasilkan—pelat tersebut tidak naik atau turun. Dengan distribusi tegangan geser yang diberikan, Persamaan 1 menjadi

$$\mathcal{D} = 2 \int_{x=0}^{4\text{ft}} \left( \frac{1,24 \times 10^{-3}}{x^{1/2}} \text{ lb/ft}^2 \right) (10 \text{ ft}) dx$$

atau

$$\mathcal{D} = 0,0992 \text{ lb} \quad \text{(Jawaban)}$$

Dengan pelat yang tegak lurus terhadap aliran hulu, kita dapatkan  $\theta = 0^\circ$  di bagian depan dan  $\theta = 180^\circ$  di bagian belakang. Jadi dari Persamaan 9.1 dan 9.2

$$\mathcal{L} = \int_{\text{depan}} \tau_w dA - \int_{\text{belakang}} \tau_w dA = 0$$

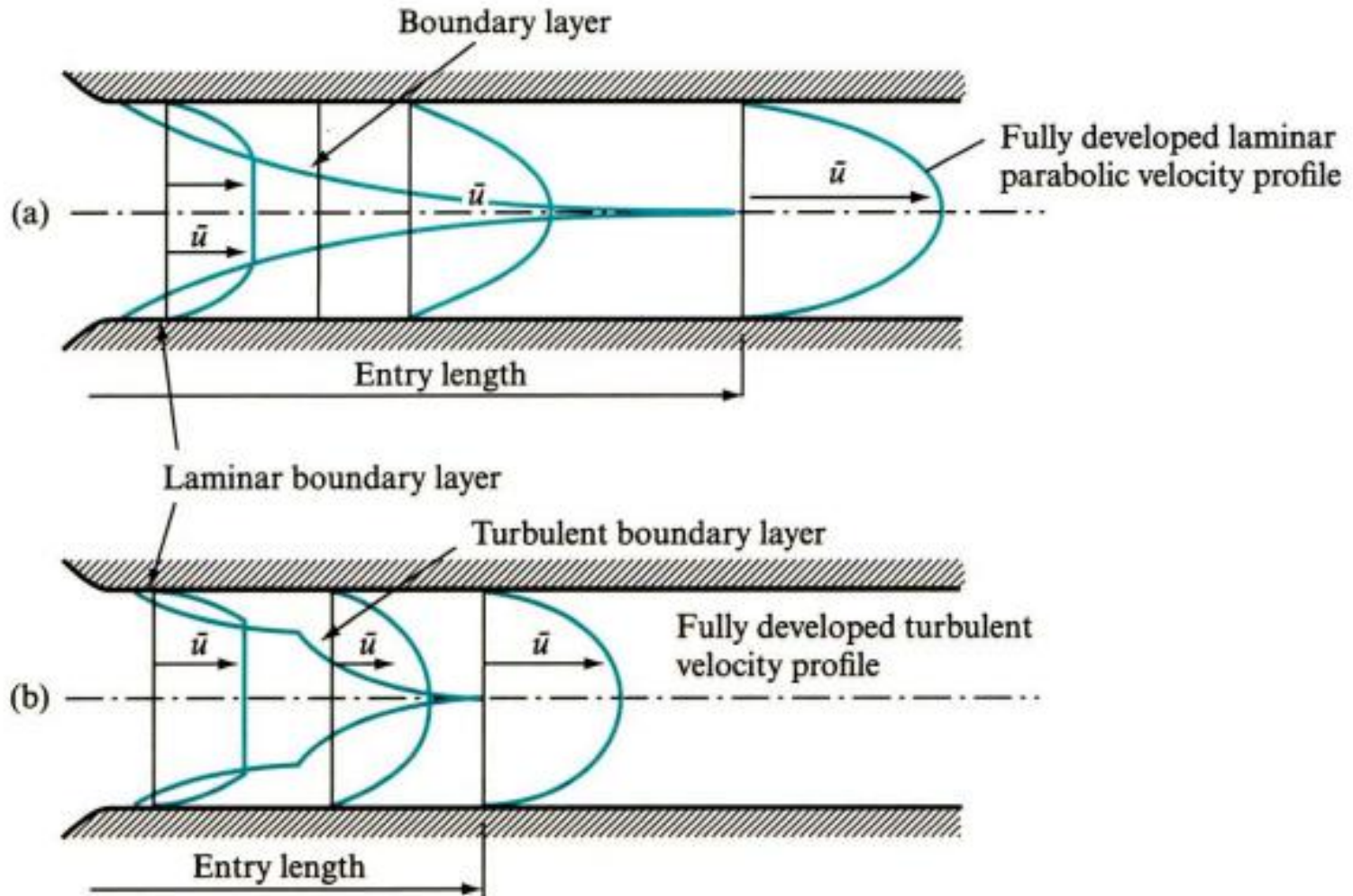
dan

$$\mathcal{D} = \int_{\text{depan}} p dA - \int_{\text{belakang}} p dA$$

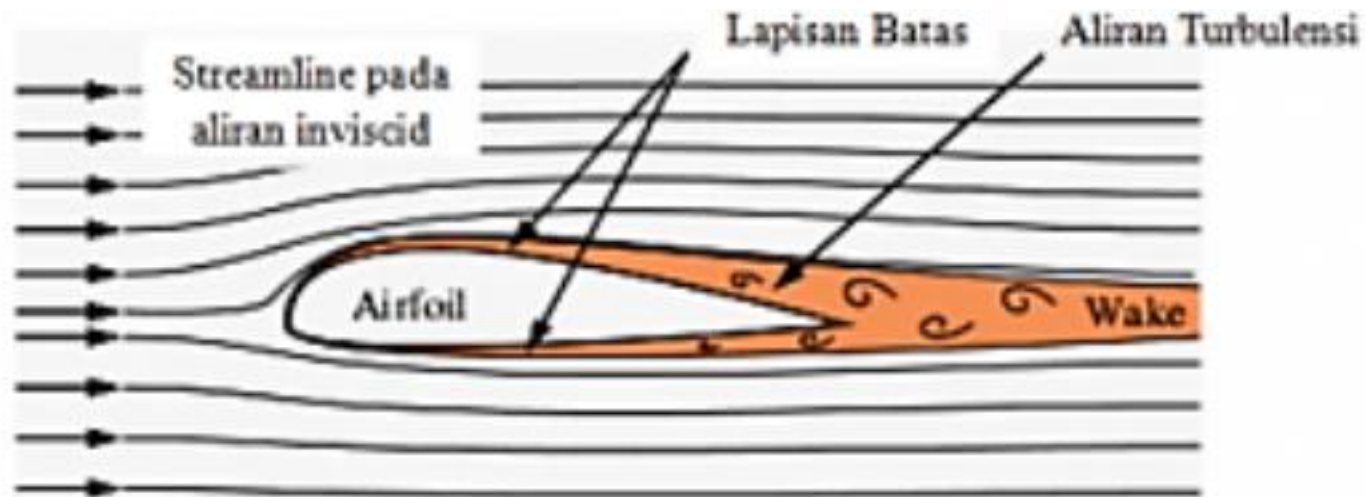
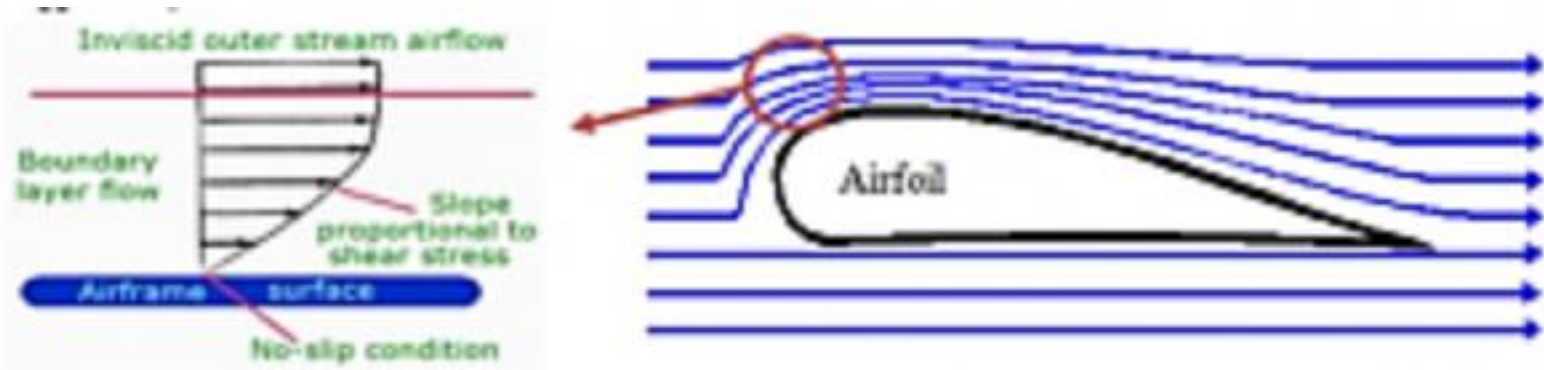
# Boundary Layer (Lapisan Batas)

Lapisan pada keadaan kecepatan aliran sama dengan nol pada permukaan saluran yang berarti tidak ada slip. Lapisan batas merata antara permukaan dengan garis aliran.

# Boundary Layer (Lapisan Batas)



# Boundary Layer (Lapisan Batas)



# Hubungan antara Tegangan Geser dengan Viskositas

$$\tau = \mu \frac{dv}{dx}$$

Keterangan;

= Tegangan geser [Pa]

= Viskositas absolut [Pa.s]

$$\mu = \rho \nu$$

= gradient kecepatan [ $s^{-1}$ ]

= massa jenis [ $kg/m^3$ ]

= viskositas kinematik [ $m^2.s^{-1}$ ]

# Bilangan Reynolds

Bilangan Reynolds adalah rasio antara gaya inersia dengan gaya viskos, digunakan untuk mengidentifikasi jenis aliran fluida, seperti aliran laminar, transisi dan turbulen.

$$Re = \frac{\rho V D_H}{\mu}$$

Keterangan;

= Volume aliran [m<sup>3</sup>]

= Viskositas absolut [Pa.s]

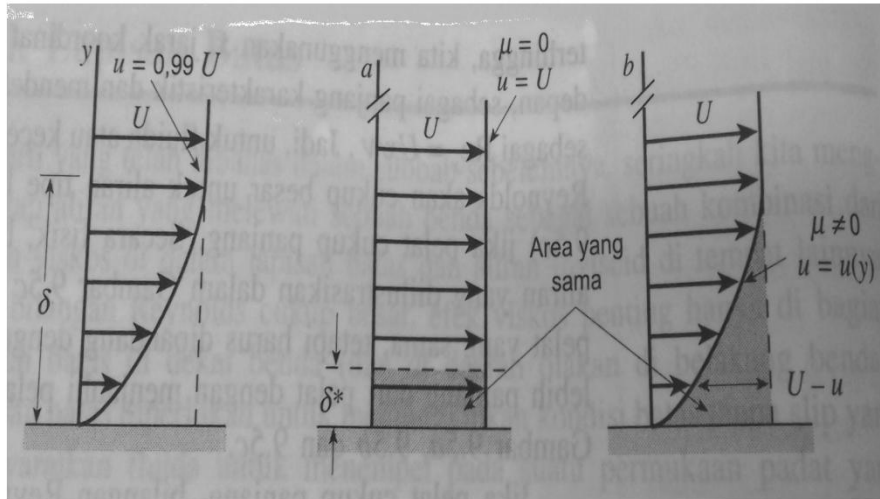
= massa jenis [kg/m<sup>3</sup>]

= Diameter hidrolis [m]

- Aliran laminar, < 2100
- Aliran transisi, 2100 < 4000
- Aliran turbulen, > 4000

Geometry	Figure	Hydraulic Diameter
Circular Tube		$D_H = \frac{4(\pi D^2/4)}{\pi D} = D$
Annulus		$D_H = \frac{4 \cdot \pi(D_o^2 - D_i^2)/4}{\pi(D_o + D_i)} = D_o - D_i$
Square Duct		$D_H = \frac{4a^2}{4a} = a$
Rectangular Duct (Fully filled)		$D_H = \frac{4ab}{2(a + b)} = \frac{2ab}{a + b}$
Channel of water or partial filled rectangular duct		$D_H = \frac{4ab}{2a + b}$

# Ketebalan Perpindahan Lapisan Batas



$$\delta^* = y$$

$$u = 0.99U$$

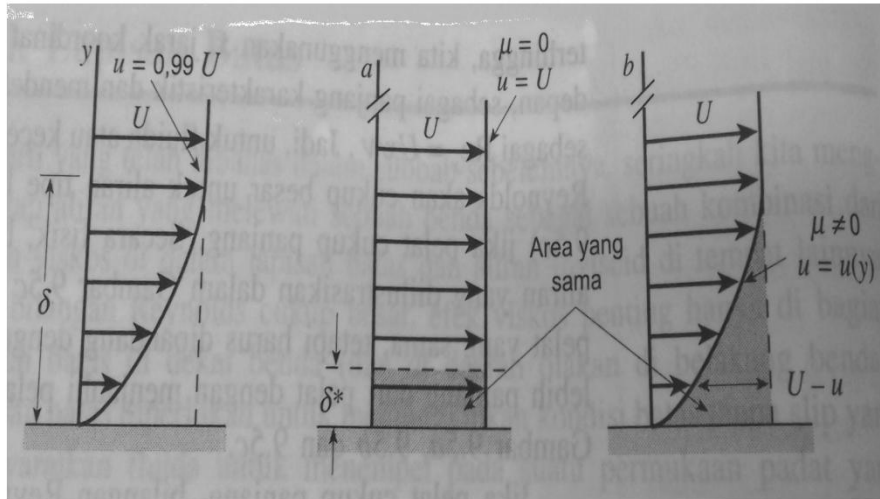
Laju aliran yang melintasi b-b kurang dari yang melintasi a-a karena berkurangnya kecepatan sebesar  $U-u$  di dalam lapisan batas

Jika kita pindahkan plat ke bagian a-a dengan besar  $\delta^*$  disebut sebagai ketebalan perpindahan lapisan batas, maka laju aliran setiap bagian akan sama

$$\delta^* b U = \int_0^{\infty} (U - u) b dy$$

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

# Ketebalan Momentum Lapisan Batas



$$\delta^* = y$$

$$u = 0.99U$$

Fluks momentum yang melintasi b-b kurang dari yang melintasi a-a karena berkurangnya kecepatan sebesar  $U-u$  di dalam lapisan batas.

$$\int \rho u (U - u) dA = \rho b \int_0^{\infty} u (U - u) dy$$

$$\rho b U^2 \Theta = \rho b \int_0^{\infty} u (U - u) dy$$



$$\Theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$$

# Penyelesaian Lapisan Batas Prandtl/Blasius

Persamaan Navier Stokes digunakan untuk menjelaskan aliran viskos tak mampu mampat yang melewati sebuah benda.

untuk mendapatkan (arah x)

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (6.127a)$$

(arah y)

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y + \mu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (6.127b)$$

(arah z)

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) \quad (6.127c)$$

# Penyelesaian Lapisan Batas Prandtl/Blasius

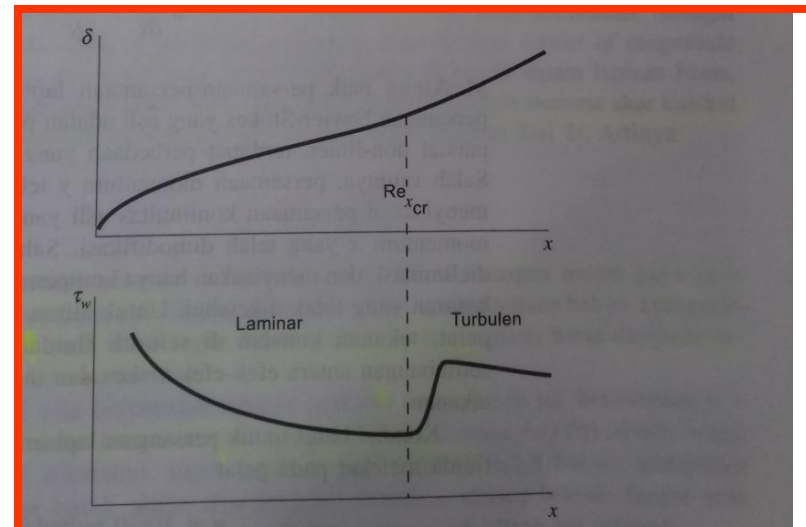
Untuk aliran laminar dua dimensi, tunak dengan efek gravitasi yang dapat diabaikan, persamaan-persamaan Navier Stokes dapat disederhanakan.

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (9.5)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (9.6)$$

Persamaan kekekalan massa

$$\frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (9.7)$$



# Penyelesaian Lapisan Batas Prandtl/Blasius

Karena lapisan batas itu tipis, komponen yang **tegak lurus** terhadap pelat jauh **lebih kecil daripada** yang **sejajar dengan pelat**.

$$v \ll u$$

Begitu juga **laju perubahan parameter** apapun melewati **lapisan batas** harus jauh **lebih besar daripada** perubahan **sepanjang arah aliran**.

$$\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$$

Aliran pada dasarnya sejajar terhadap pelat dan sifat fluida apapun dikonveksikan ke hilir jauh lebih cepat dari pada yang berdifusi melintasi garis arus

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

# Penyelesaian Lapisan Batas Prandtl/Blasius

Untuk aliran lapisan batas di atas permukaan pelat, tekanan konstan di seluruh fluida. Aliran menyatakan suatu kestimbangan antara efek-efek viskos dan inersia tanpa adanya peranan dari tekanan.

Kondisi batas untuk persamaan lapisan batas :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$u = v = 0$$

terhadap  $y=0$

$$u = U$$

aliran hulu, kecepatan seragam

$$u = 0.99U$$

kecepatan aliran berbeda 1% dari kec. hulu pada jarak  $\delta$  dari pelat

# Penyelesaian Lapisan Batas Prandtl/Blasius

Persamaan aliran batas merupakan persamaan parabolik yang dapat didefinisikan bahwa apa yang terjadi di hilir pada jarak tertentu di dalam lapisan batas tidak dapat mempengaruhi apa yang terjadi di hulu dari titik tersebut.

Dalam bentuk tak berdimensi profil kecepatan lapisan batas pada sebuah pelat datar harus serupa tanpa tergantung dari lokasi di sepanjang pelat :

$$\frac{u}{U} = g\left(\frac{y}{\delta}\right) \rightarrow g\left(\frac{y}{\delta}\right)$$

fungsi tak diketahui yang akan ditentukan

# Penyelesaian Lapisan Batas Prandtl/Blasius

Ketebalan lapisan batas tumbuh menurut akar kuadrat dari  $x$  dan berbanding terbalik terhadap akar kuadrat dari  $U$ .

$$\delta \sim \left( \frac{\nu x}{U} \right)^{1/2}$$

Kecepatan bervariasi jauh lebih cepat dalam arah melintasi lapisan batas daripada sepanjang lapisan tersebut.

# Penyelesaian Lapisan Batas Prandtl/Blasius

Persamaan lapisan batas dapat dituliskan dalam variabel keserupaan. Dalam hal ini variabel keserupaan tak berdimensi yang digunakan adalah  $\eta$

$$\eta = \left( \frac{U}{\nu x} \right)^{1/2} y$$

$$\psi = (\nu x U)^{1/2} f(\eta)$$

fungsi arus

$$f = f(\eta)$$

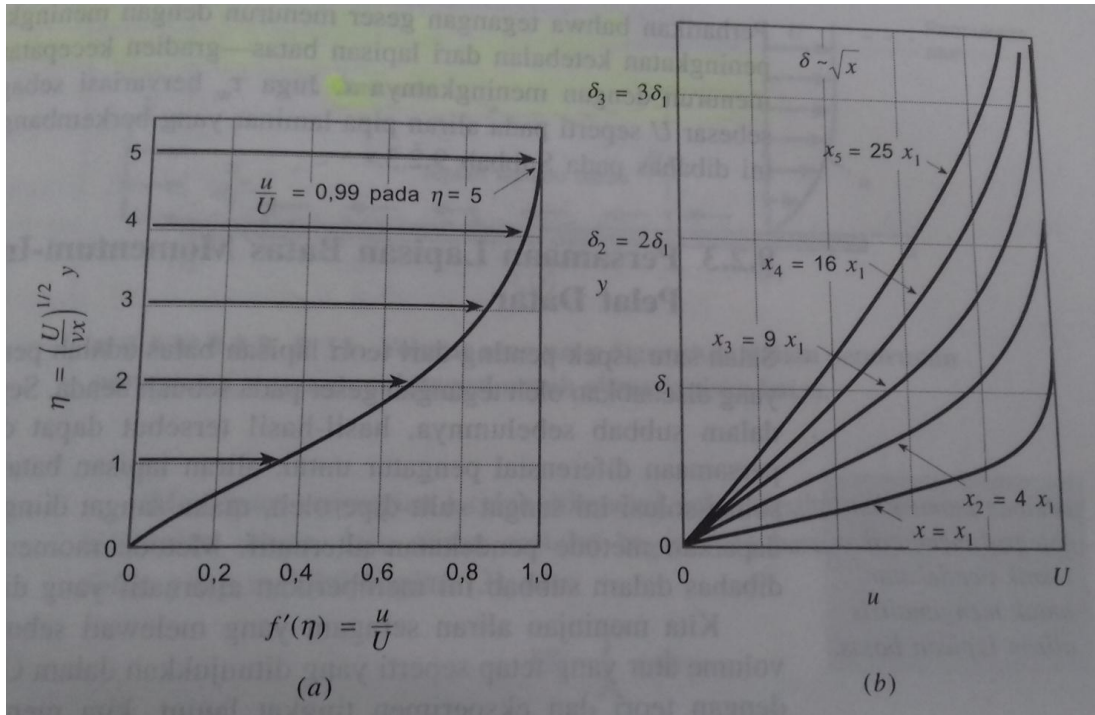
fungsi yang tidak diketahui

$$u = U f'(\eta)$$

Komponen kecepatan dalam lapisan batas

# Penyelesaian Lapisan Batas Prandtl/Blasius

## Profil lapisan batas Blasius



$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{5}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

$$\text{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}$$

Profil pada  $x_1$  sama seperti pada  $x_2$  kecuali bahwa koordinat  $y$  diregangkan dengan sebuah faktor  $(x_2/x_1)^{1/2}$

# Penyelesaian Lapisan Batas Prandtl/Blasius

■ TABEL 9.1 Aliran Laminar Sepanjang Pelat Datar (Penyelesaian Blasius)

$\eta = y(U/\nu x)^{1/2}$	$f'(\eta) = u/U$	$\eta$	$f'(\eta)$
0	0	3,6	0,9233
0,4	0,1328	4,0	0,9555
0,8	0,2647	4,4	0,9759
1,2	0,3938	4,8	0,9878
1,6	0,5168	5,0	0,9916
2,0	0,6298	5,2	0,9943
2,4	0,7290	5,6	0,9975
2,8	0,8115	6,0	0,9990
3,2	0,8761	$\infty$	1,0000

$$\frac{\delta^*}{x} = \frac{1.721}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

$$\frac{\Theta}{x} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

$$\tau_w = 0.33U^{3/2} \sqrt{\frac{\rho\mu}{x}}$$

# Pendekatan Penyelesaian Lapisan Batas

- Persamaan Lapisan Batas Momentum-Integral untuk Pelat Datar

■ TABEL 9.2 Hasil perhitungan Momentum-Integral untuk Pelat Datar dengan Berbagai Asumsi Profil Kecepatan Aliran laminar.

Karakter Profil	$\delta Re_x^{1/2} / x$	$c_f Re_x^{1/2}$	$C_{Df} Re_\ell^{1/2}$
a. Penyelesaian Blasius	5,00	0,664	1,328
b. Linear $u/U = y/d$	3,46	0,578	1,156
c. Parabola $u/U = 2y/\delta - (y/\delta)^2$	5,48	0,730	1,460
d. Kubik $u/U = 3(y/\delta)/2 - (y/\delta)^3/2$	4,64	0,646	1,292
e. Gelombang sinus $u/U = \sin[\pi(y/\delta)/2]$	4,79	0,655	1,310

# Transisi dari Aliran Laminar ke Turbulen

Hasil-hasil analitis yang diberikan dalam Tabel pada slide sebelumnya terbatas untuk aliran lapisan batas laminar sepanjang pelat datar dengan gradien tekanan nol.

Ingat, apa itu bilangan Reynolds?

Bilangan Reynolds berdasarkan jarak dari ujung depan pelat,

$$Re_x = \frac{Ux}{\nu}$$



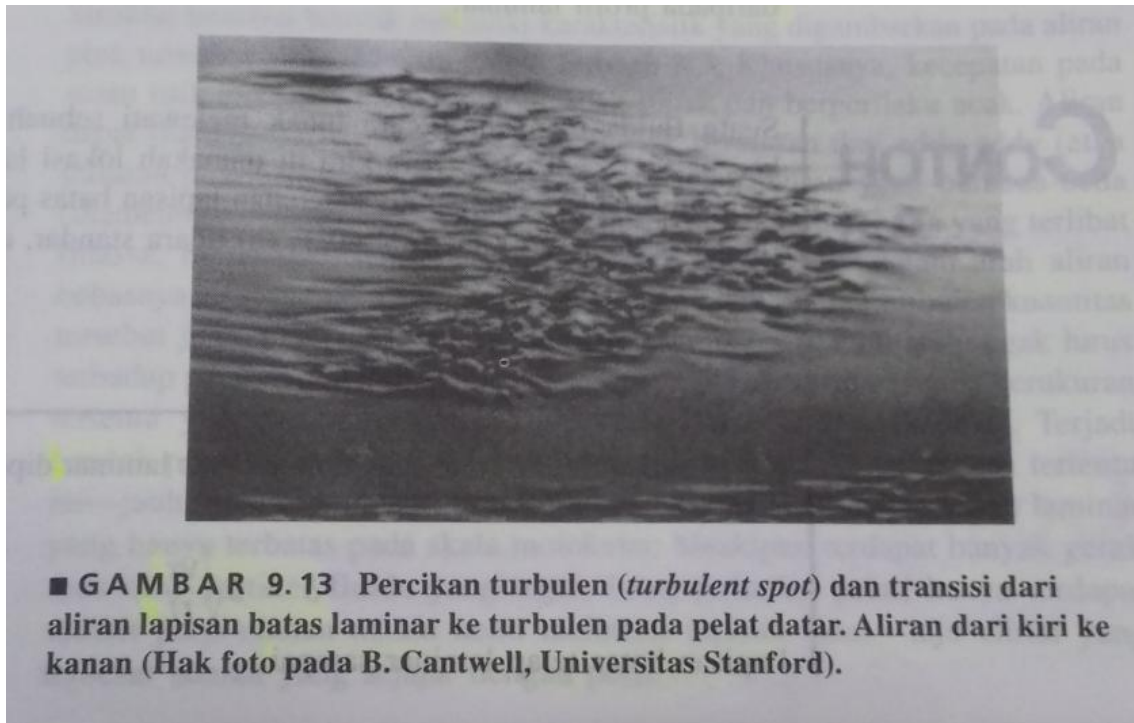
Transisi,  $Re_{xcr} = 2 \cdot 10^5 - 3 \cdot 10^6$



Transisi,  $Re_{xcr} = 5 \cdot 10^5$

# Transisi dari Aliran Laminar ke Turbulen

- Transisi aktual dari aliran lapisan batas laminar menuju turbulen dapat terjadi di sepanjang suatu daerah pada pelat.
- Transisi terjadi karena sifat percikan (*spottiness*).
- Transisi dimulai pada suatu lokasi yang acak pada pelat di sekitar  $Re_x = Re_{xcr}$
- Kemudian, percikan awal berkembang dengan cepat selagi terkonveksi ke hilir sampai seluruh lebar pelat diliputi oleh aliran turbulen.



# Transisi dari Aliran Laminar ke Turbulen

- Gangguan kecil menyebabkan aliran lapisan batas (getaran dari pelat, kekasaran permukaan atau goyangan dari aliran yang melewati pelat) akan dapat tumbuh (instabilitas) atau luruh (stabilitas).
- Jika gangguan pada  $Re_x < Re_{xcr}$  maka gangguan akan menghilang dan lapisan batas kembali ke aliran laminar pada lokasi tersebut.
- Gangguan pada aliran di lokasi  $Re_x > Re_{xcr}$  akan tumbuh dan mengubah aliran lapisan batas di hilir pada lokasi ini menjadi turbulensi.
- Profil aliran turbulen lebih rata dan mempunyai gradien kecepatan lebih besar pada dinding serta menghasilkan ketebalan lapisan batas yang lebih besar dari aliran laminar.

# Transisi dari Aliran Laminar ke Turbulen

- Untuk setiap fluida, ketebalan lapisan batas laminar diperoleh dari:

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

- Lapisan batas tetap laminar sampai

$$x_{cr} = \frac{\nu Re_{cr}}{U}$$

# Contoh soal

Suatu fluida mengalir secara tunak melewati sebuah pelat datar dengan kecepatan  $U = 10$  ft/s. Kira-kira di manakah lokasi lapisan batasnya akan menjadi turbulenta, dan berapa ketebalan lapisan batas pada titik tersebut jika fluidanya a). Air pada  $60^{\circ}\text{F}$ , b). udara standar, c). gliserin pada  $68^{\circ}\text{F}$ .

$$\delta = 5 \sqrt{\frac{\nu x}{U}}$$

$$x_{cr} = \frac{\nu \text{Re}_{cr}}{U}$$

# Latihan Soal

1. Air mengalir melalui sebuah pelat datar dengan kecepatan hulu  $U = 0.02$  m/s. Tentukan kecepatannya pada jarak 10 mm di atas pelat pada jarak  $x = 1.5$  m dan  $x = 15$  m dari ujung depan.
2. Pelat datar licin dengan panjang  $l = 6$  m dan lebar  $b = 4$  m diletakkan di dalam air dengan kecepatan hulu  $U = 0.5$  m/s. Tentukan ketebalan lapisan batas dan tegangan geser pada bagian tengah dan ujung belakang pelat. asumsikan suatu lapisan batas laminar.

# Fluida Kompresibel

Fluida *compressible* adalah fluida yang massa jenisnya bervariasi terhadap suhu dan tekanan yang terjadi pada fluida tersebut.

Contoh: gas

# Gas Ideal

$$P \cdot v = R \cdot T$$

Keterangan;

P = Tekanan absolut [N/m<sup>2</sup>]

v = volume jenis gas [m<sup>3</sup>/kg]

R = Konstanta gas [joule/kg-mole]

T = Temperatur absolut gas [°K]

# Gas Ideal

Untuk massa  $m$  persamaan gas ideal dapat ditulis :

$$P.V = m.R.T$$

Keterangan;

$V$  = volume gas sebenarnya [ $m^3$ ]

$m$  = massa gas [kg]

# Gas Ideal

Untuk jumlah mole gas persamaan gas ideal menjadi :

$$P \cdot v^* = R_0 \cdot T \quad \text{atau} \quad P \cdot v^* = n \cdot R_0 \cdot T$$

Dimana;  $R = \frac{R_0}{M}$

Keterangan;

$n$  = jumlah mole gas [kg-mole]

$v^*$  = volume jenis molar [ $\text{m}_3/\text{kg-mole}$ ]

$R_0$  = konstanta gas universal [joule/kg-mole. $^0\text{K}$ ]

$M$  = berat molekul gas [kg/kg-mole]

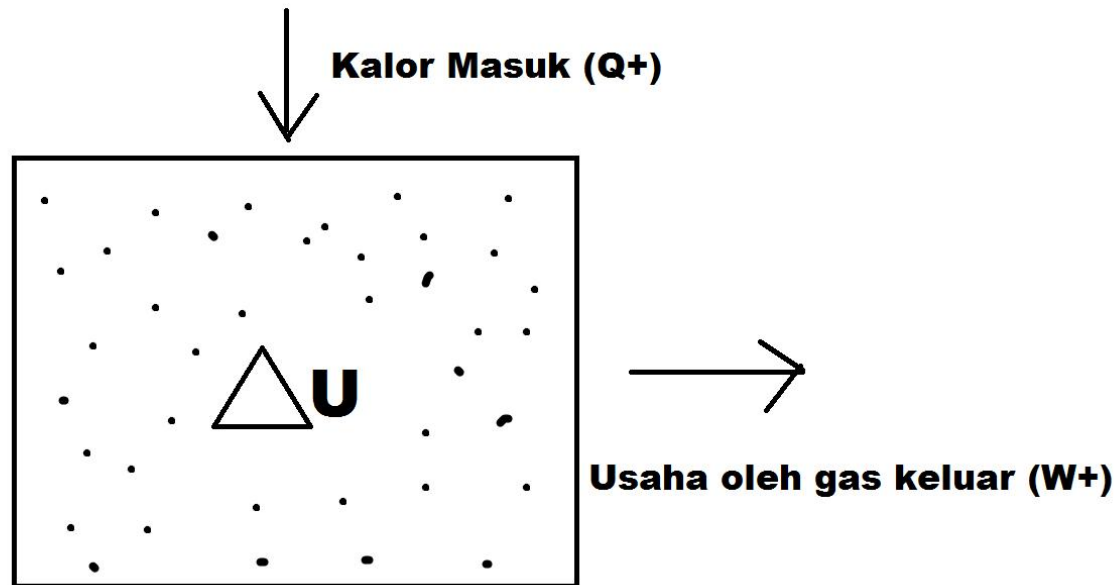
# Gas Ideal

Keterangan;

$$R_0 = 8,3149 \cdot 10^3 \frac{Nm}{kg - mole.^{\circ} K}$$

$$R_0 = 848 \frac{kg.m}{kg - mole.^{\circ} K}$$

# Hukum Termodinamika I



$$dQ = dU + dW$$

# Kapasitas Panas

*Bila pada suatu sistem diberikan panas  $dQ$  hingga menaikkan temperatur sistem sebesar  $dT$ , maka perbandingan panas  $dQ$  dengan kenaikan temperatur  $dT$  disebut kapasitas panas dari sistem.*

$$C = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU + dW}{dT} \quad \left[ \frac{J}{^{\circ}C} \right]$$

- proses berjalan dengan volume konstan,  $C_v$
- Proses berjalan pada tekanan konstan,  $C_p$

# Panas Jenis

Kapasitas panas  $C$  persatuan massa  $m$  disebut panas jenis (specific heat) disimbol dengan  $c$ , jadi panas jenis suatu sistem adalah :

$$c = \frac{C}{m} = \frac{dQ}{m \cdot dT} \quad \left[ \frac{J}{Kg^{\circ}C} \right]$$

Panas yang masuk kesistem persatuan massa untuk perubahan temperatur  $dT$ , besarnya :

$$dq = c \cdot dT$$

Untuk proses dengan volume konstan :

$$dq = c_v \cdot dT$$

Untuk proses dengan tekanan konstan :

$$dq = c_p \cdot dT$$

Panas total yang masuk ke sistem (untuk massa  $m$ ), besarnya :

$$dQ = m \cdot dq = m \cdot c_p \cdot dT \quad \text{atau :} \quad Q = m \int_{T_1}^{T_2} c_p \cdot dT$$

Untuk proses dengan volume konstan :

$$Q = U_2 - U_1 = m c_v (T_2 - T_1)$$

Untuk proses dengan tekanan konstan :

$$Q = m \cdot c_p (T_2 - T_1)$$

Untuk semua gas dapat ditulis :

$$c_p - c_v = R \quad \text{dimana : } \frac{c_p}{c_v} = k, \text{ maka :}$$

$$c_p = \frac{kR}{k - 1}$$

$$c_v = \frac{R}{k - 1}$$

# Entalpi

Entalpi suatu sistem adalah penjumlahan dari energi dalam dengan hasil kali tekanan dan volume sistem.

$$h = U + P.V$$

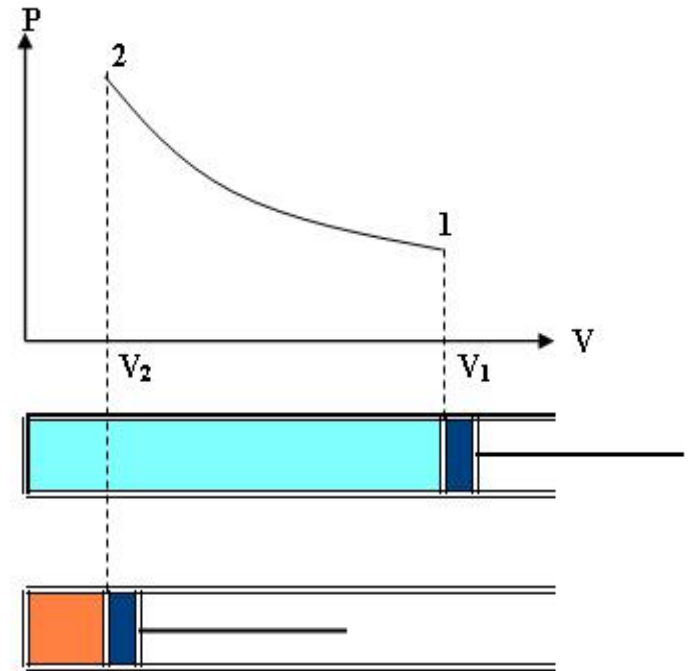
$$Q = h_2 - h_1$$

$$h_2 - h_1 = m.c_p(T_2 - T_1)$$

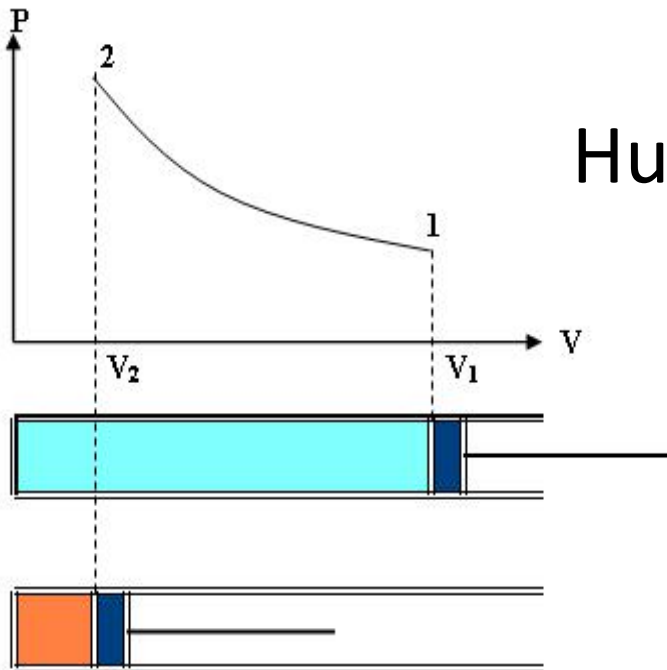
$$h_2 - h_1 = c_p(T_2 - T_1)$$

# Proses Isentropik

- Proses pada entropi konstan,  $ds = dq/T = 0$
- Pada proses ini tidak ada kalor yang masuk, maupun keluar dari sistem,  $Q = 0$ .



# Proses Isentropik



Hukum thermodynamika pertama

$$dq = du + dw$$

$$0 = du + dw$$

atau

$$U_2 - U_1 = -W$$

# Proses Isentropik

$$dQ = dU + dW \quad \text{Dimana,} \quad dW = p dV$$
$$dU = mc_v dT$$
$$P = \frac{mRT}{V}$$

maka,

$$dQ = dU + p dV = mc_v dT + \frac{mRT dV}{V}$$

$$dq = du + p dV = c_v dT + \frac{RT dV}{V}$$

# Proses Isentropik

Setiap ruas dibagi T,

$$\frac{dq}{T} = \frac{c_v dT}{T} + \frac{RdV}{V}$$

Atau 
$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dq}{T} = c_v \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) + R \ln \left( \frac{V_2}{V_1} \right)$$

Atau

$$\Delta S = \int_1^2 \frac{dq}{T} = c_p \ln \left( \frac{T_2}{T_1} \right) - R \ln \left( \frac{P_2}{P_1} \right)$$

# Tugas

Gas mengalir dalam suatu saluran dengan luas penampang tetap sebanyak 0.15 kg/s. Saluran tersebut didinginkan oleh nitrogen. Kerugian panas (heat loss) pada saluran ini sebesar 15 kJ/s. Tekanan mutlak, temperatur dan kecepatan aliran pada sisi masuk saluran adalah berturut-turut 188 kPa, 440 K, dan 210 m/s. Sedangkan pada sisi keluar tekanan mutlak dan temperatur sebesar 213 kPa dan 351 K. Hitung luas penampang dari saluran dan perubahan-perubahan entalpi ( $\Delta h$ ), energi dalam ( $\Delta u$ ), dan entropi pada aliran tersebut.

# Bilangan *Mach*

Bilangan Mach merupakan rasio antara kecepatan fluida lokal dan kecepatan suara lokal

$$M = \frac{V}{c}$$

dimana,

M= bilangan Mach

V = kecepatan aliran lokal [m/s]

c = kecepatan suara lokal [m/s]

$$c = \sqrt{RTk}$$

dimana,

R= konstanta gas [J/kg K]

T= Temperatur [K]

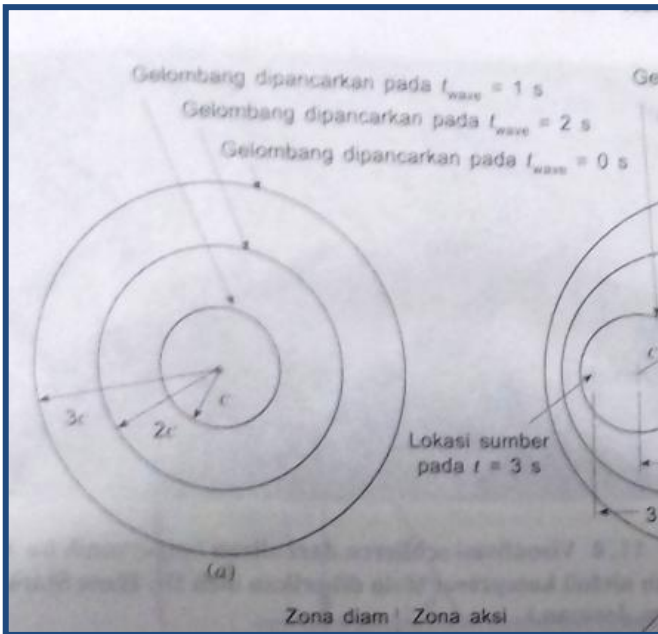
k = konstanta adiabatik

# Kategori Aliran Mampu Mampat

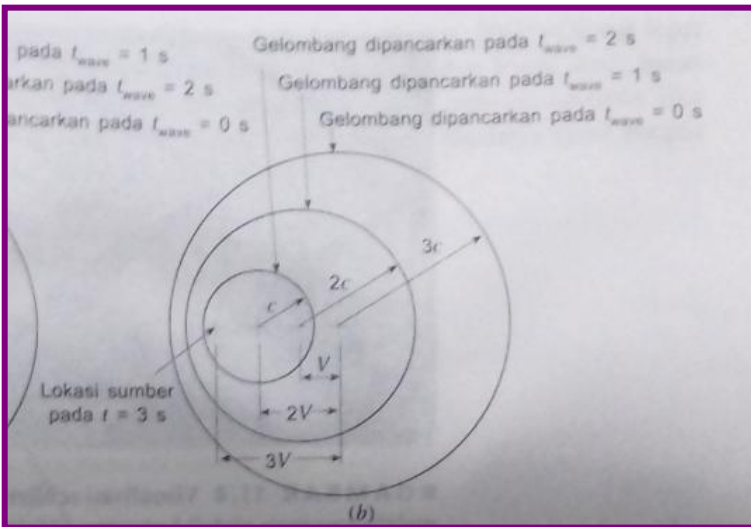
Apabila sumber titik dan fluida diam, maka pola gelombang tekanan simetris.

Pola gelombang tekanan simetris mewakili fluida tak mampu mampat.

Seorang pengamat dimanapun letaknya dapat mendengar bunyi dengan frekuensi yang sama dari titik sumber.



# Kategori Aliran Mampu Mampat



Apabila sumber titik bergerak dalam fluida diam, atau sebaliknya maka pola gelombang tekanan tak simetris.

Ketidaksimetrisan tergantung dari  $V/c$ . Apabila  $V/c < 1$  maka aliran subsonik mampu mampat.

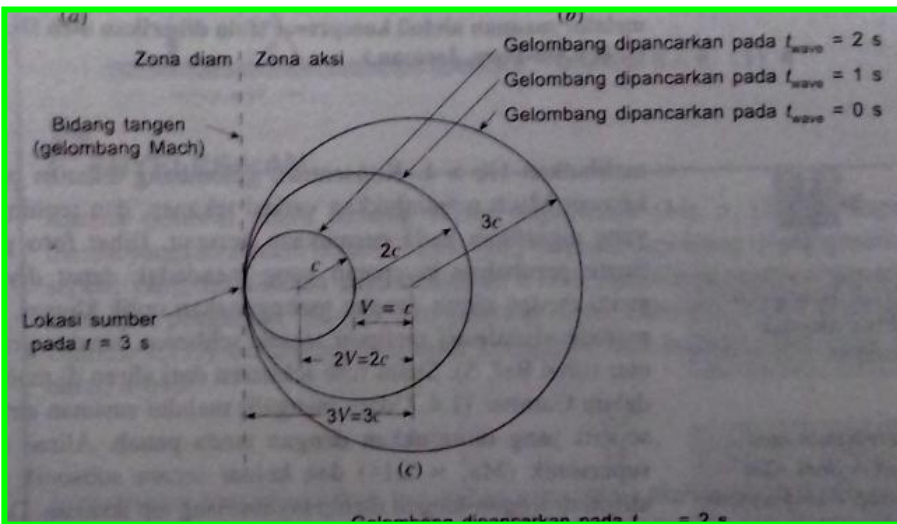
Seorang pengamat yang diam akan mendengar berbagai frekuensi bunyi yang datang dari sumber tergantung lokasi pengamat relatif terhadap sumber. (Efek Doppler)

# Kategori Aliran Mampu Mampat

Apabila  $V/c = 1$  maka aliran sonik mampu mampat.

Komunikasi informasi tekanan terbatas pada daerah hilir (Zona Aksi) dari gelombang Mach

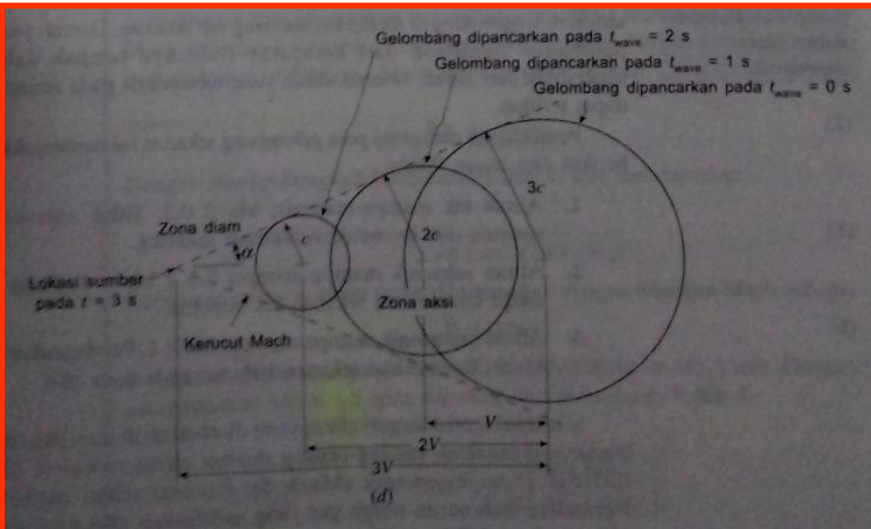
Daerah hulu dari gelombang Mach disebut zona diam dan pengamat di daerah ini tidak dapat mendengar sumber titik.



# Kategori Aliran Mampu Mampat

Apabila  $V > c$  maka aliran supersonik mampu mampat.

Komunikasi informasi tekanan terbatas pada zona aksi.



Terbentuk kerucut Mach yang memisahkan zona diam dan aksi.

$$\sin \alpha = \frac{c}{V} = \frac{1}{Ma}$$

# Kategori Aliran Mampu Mampat

$M < 0.3$  – *Subsonic & incompressible*

$0.3 < M < 0.8$  – *Subsonic & compressible*

$0.8 < M < 1.2$  – *transonic flow*

$1.2 < M < 3.0$  – *supersonic*

$M > 3.0$  – *hypersonic flow*

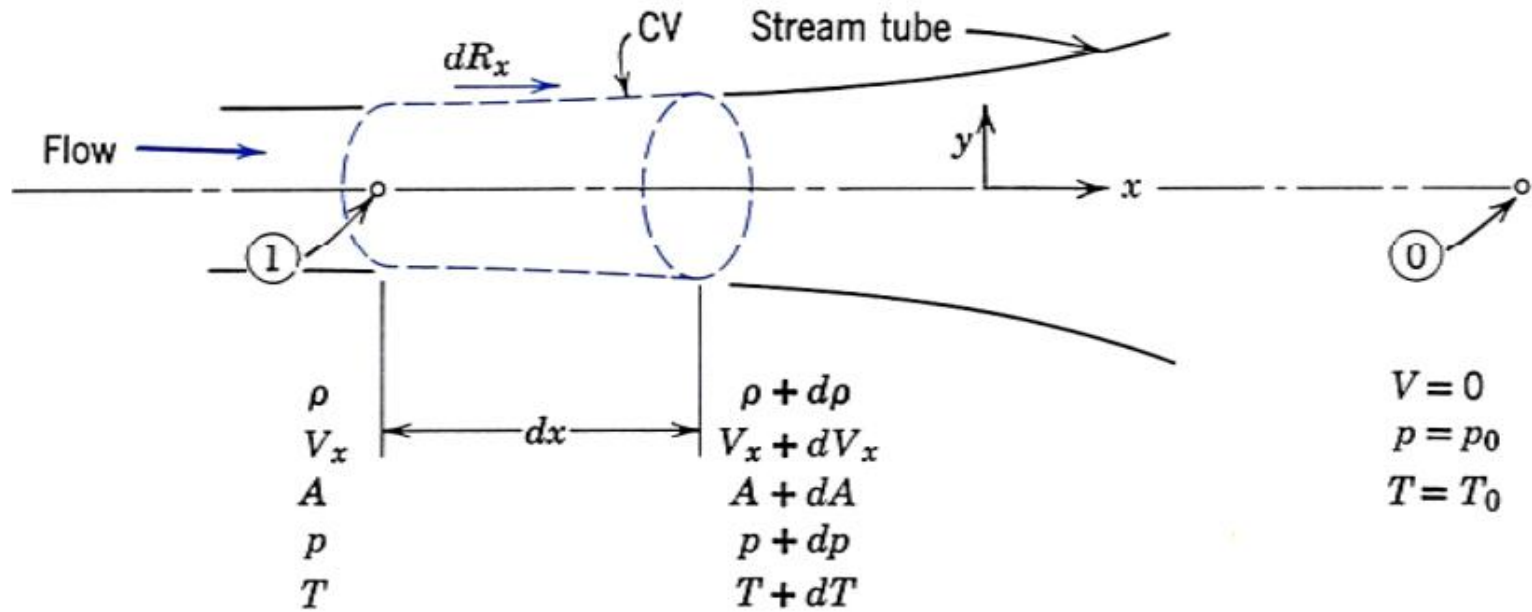
# Aliran Isentropik dari Gas Ideal

Aliran isentropik melibatkan entropi konstan, tidak melibatkan perpindahan panas dan tanpa gesekan.

Aplikasi:

1. Nozzle pada mesin roket
2. Gas buang melewati *blade* pada turbin
3. Diffuser pada *jet engine*

# Steady Isentropic Flow



# Steady Isentropic Flow

## Conservation Equations for One-Dimensional Isentropic Flow

Conservation of Mass (Continuity):  $d(\rho V_x A) = 0$  or  $\rho V_x A = \dot{m} = \text{constant}$

Conservation of Momentum:  $\frac{dp}{\rho} + d\left(\frac{V_x^2}{2}\right) = 0$

Conservation of Energy:  
(1st Law Thermo)  $d\left(h + \frac{V_x^2}{2}\right) = 0$  or  $h + \frac{V_x^2}{2} = h_0 = \text{constant}$

2nd Law of Thermo:  $s = \text{constant}$

Equations of State:  
 $h = h(s, p)$   
 $\rho = \rho(s, p)$

Isentropic Process of Ideal Gas:  $\frac{p}{\rho^k} = \text{constant}$

# Steady Isentropic Flow

Equations for an Isentropic Process of an Ideal Gas

$$\frac{P}{\rho^k} = \text{constant} = \frac{P_0}{\rho_0^k}$$

And with the aid of the Ideal Gas Equation

$$\frac{T_0}{T} = \left( \frac{P_0}{P} \right)^{(k-1)/k} = \left( \frac{\rho_0}{\rho} \right)^{(k-1)}$$

# Steady Isentropic Flow

Equations for determining Local Isentropic Stagnation Properties of an Ideal Gas

Using Isentropic Process Equations and Conservation of Momentum (integrated)

$$\frac{p_0}{p} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]^{k/(k-1)} \quad \frac{T_0}{T} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right] \quad \frac{\rho_0}{\rho} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} M^2 \right]^{1/(k-1)}$$

Sonic (Critical) Conditions

$$M = 1 \quad (V^* = c^*)$$

$$\frac{p_0}{p^*} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} \right]^{k/(k-1)} = 1.893 \text{ for diatomic gas } (k=1.4)$$

$$V^* = c^* = \sqrt{\frac{2k}{k+1} RT_0^*}$$

$$\frac{T_0}{T^*} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} \right] = 1.2 \text{ for diatomic gas } (k=1.4)$$

$$\frac{\rho_0}{\rho^*} = \left[ 1 + \frac{k-1}{2} \right]^{1/(k-1)} = 1.577 \text{ for diatomic gas } (k=1.4)$$

# Steady Isentropic Flow

## Effects of Area Variation on Properties of Isentropic Flow

From Conservation of Momentum  $\frac{dp}{\rho V^2} = -\frac{dV}{V}$

From Conservation of Mass  $\frac{dA}{A} = -\frac{dV}{V} - \frac{d\rho}{\rho}$

Combine  $\frac{dA}{A} = \frac{dp}{\rho V^2} \left[ 1 - \frac{V^2}{dp/d\rho} \right] = \frac{dp}{\rho V^2} [1 - M^2]$

$$\frac{dA}{A} = \frac{-dV}{V} [1 - M^2]$$

# Aliran Isentropik dari Gas Ideal

## Pengaruh dari Variasi Luas Penampang Aliran

$$\dot{m} = \rho AV = \text{const.}$$

dimana,

$\dot{m}$  = massa alir [kg/s]

$\rho$  = kerapatan [kg/m<sup>3</sup>]

A = luas penampang [m<sup>2</sup>]

V = kecepatan fluida [m/s]

Untuk aliran tak mampu mampat, kerapatan fluida konstan sepanjang aliran.

Untuk aliran mampu mampat, baik kerapatan maupun kecepatan fluida bervariasi sepanjang aliran.

# Aliran Isentropik dari Gas Ideal

Pengaruh dari Variasi Luas Penampang Aliran

$$dp + \frac{1}{2} \rho d(V^2) + \gamma dz = 0$$

Untuk aliran gas ideal,  $\gamma dz$  dapat dihilangkan karena perubahannya sangat kecil.

$$\frac{dp}{\rho V^2} = -\frac{dV}{V}$$

Untuk aliran isentropik gas ideal

# Aliran Isentropik dari Gas Ideal

Pengaruh dari Variasi Luas Penampang Aliran

$$\dot{m} = \rho AV = \text{const.}$$

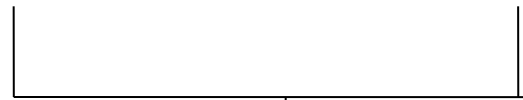


$$\ln \rho + \ln A + \ln V = \text{const.}$$



$$\frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} + \frac{dV}{V} = 0$$

$$-\frac{dV}{V} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dA}{A} = -\frac{dp}{\rho V^2} = -\frac{dV}{V}$$



$$\frac{dp}{\rho V^2} \left( 1 - \frac{V^2}{dp/d\rho} \right) = \frac{dA}{A}$$

# Aliran Isentropik dari Gas Ideal

Pengaruh dari Variasi Luas Penampang Aliran

$$\frac{dp}{\rho V^2} \left( 1 - \frac{V^2}{dp/d\rho} \right) = \frac{dA}{A}$$

$$c = \sqrt{\left( \frac{\delta p}{\delta \rho} \right)_s}$$

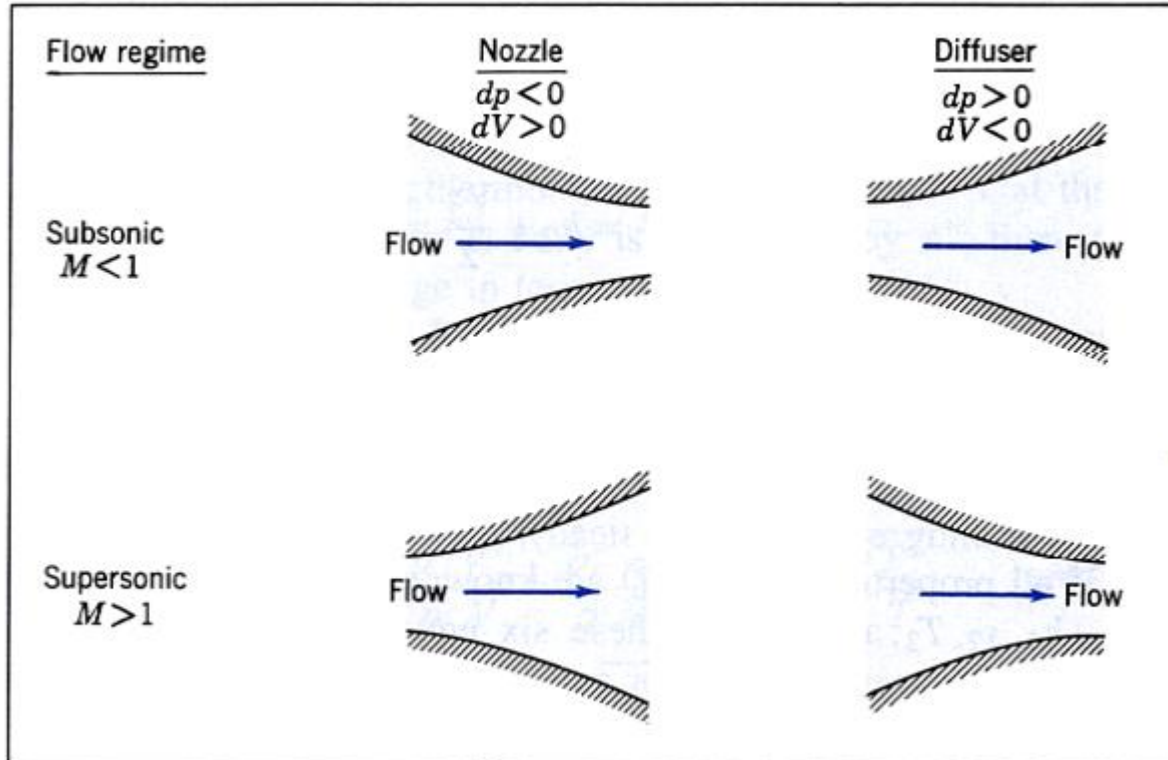
$$Ma = \frac{V}{c}$$



$$\frac{dp}{\rho V^2} (1 - Ma^2) = \frac{dA}{A} \quad = \quad \frac{dp}{\rho V^2} = -\frac{dV}{V} \quad \rightarrow \quad \frac{dV}{V} = -\frac{dA}{A} \left( \frac{1}{1 - Ma^2} \right)$$

# Aliran Isentropik dari Gas Ideal

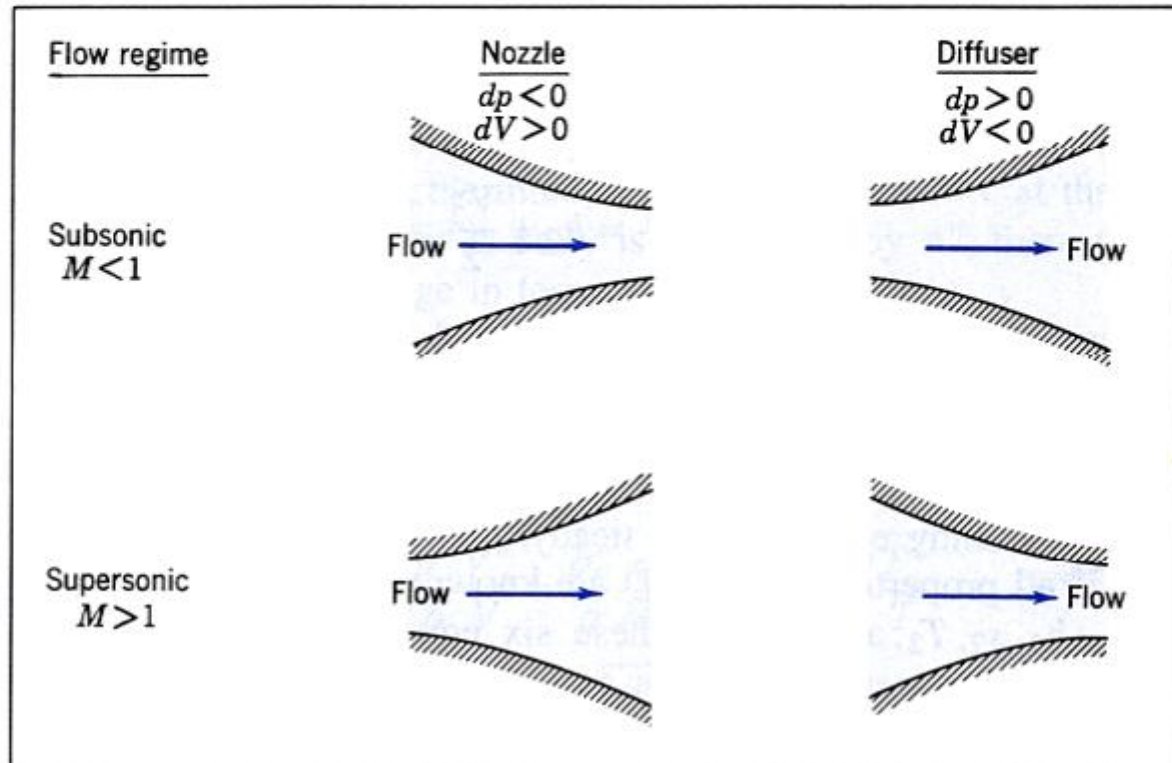
Pengaruh dari Variasi Luas Penampang Aliran



# Steady Isentropic Flow

$$\frac{dA}{A} = \frac{-dV}{V} [1 - M^2]$$

Sonic conditions will be reached where the area is minimum (Throat)



# DAFTAR PUSTAKA

- Munson, Bruce R., Donald F. Young, Theodore H. Okiishi. 2002. Fundamentals of Fluid Mechanics. 4<sup>th</sup> Edition. John Wiley & Sons, Inc.